NÚMERO 437 DEZEMBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII

C. D. U. 517.93:518.1

Aplicação do Método Explícito-Implícito em Sistemas de Equações Parabólicas, não Lineares, em Domínios de Geometria Arbitrária

J. J. DELGADO DOMINGOS
L. F. C. RORIZ
C. T. A. M. F. U. L.

RESUMO:

Define-se o método explícito-implícito para a solução numérica de sistemas de equações às derivadas parciais parabólicas não lineares em domínios de geometria arbitrária e apresentam-se alguns resultados de aplicação. As vantagens relativas ao método dos elementos finitos e aos de diferenças finitas implícitas são referidas quanto aos aspectos memória — tempo de cálculo.

SUMMARY:

The explicit-implicit method for the numerical solution of systems of non linear parabolic partial differential equations in arbitrary geometries is defined and some results of application are shown. The relative advantages in relation to the finite element methods and implicit finite difference methods are refered in what concerns memory--computing time.

1. INTRODUÇÃO

A resolução de problemas em transferência de energia e matéria, quando formulados em termos das equações fundamentais, envolve tipicamente a resolução das equações às derivadas parciais, de tipo parabólico ou elíptico. No caso mais simples, o sistema reduz-se à equação do calor, ou da difusão:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \theta$$

No caso de escoamento em meios porosos, de difusão com reacção química, etc., ter-se-á em geral um sistema de equações não lineares. Em termos de complexidade crescente, o caso geral é constituído pelas equações do movimento tridimensional de um fluido viscoso, em que existe transferência de energia (calor) e de matéria. Se o escoamento é turbulento, os modelos de turbulência actualmente desenvolvidos para o cálculo das tensões de Reynolds, traduzem-se também por sistemas de equações do mesmo tipo, que representaremos simbolicamente por:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \nabla^2 u_i + f\left(u_i, u_j, \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda}\right) \quad \begin{array}{l} j=1, 2, 3 \ldots n \\ \lambda=1, 2, 3 \ldots \end{array}$$

O método de solução numérica do sistema parabólico anterior, é também aplicável à resolução do problema elíptico que corresponde à estacionaridade.

Sob o aspecto analítico, para a maioria dos problemas não é possível a obtenção de soluções. Em inúmeros casos não existe mesmo a demonstração formal da sua existência e unicidade.

Numericamente, vários métodos têm sido propostos, apresentando cada um o seu domínio próprio de vantagens, em face da natureza do problema e do rigor exigido para o resultado.

Dum modo geral, podemos agrupar os métodos existentes em duas grandes categorias: os que possuem uma formulação matemática completa e a demonstração de estabilidade e convergência; os que possuem uma formulação essencialmente física, cuja validade é testada com resultados experimentais obtidos num modelo físico. A complexidade das equações torna muitas vezes impossível a construção de esquemas numéricos para os quais seja possível a demonstração matemática de estabilidade e convergência. Por outro lado, tal demonstração implica que a dimensão da malha tenda para zero, o que constitui um requisito impossível de satisfazer na maioria dos cálculos. Sucede ainda que a realização em computador de um dado esquema numérico introduz erros não tidos ainda em conta pela teoria actual do cálculo numérico, pelo que, a redução da malha pode conduzir à divergência numérica, contra-

riamente ao que a teoria (incompleta) permitiria esperar. Os esquemas baseados em formulações essencialmente físicas, não raro carecem na generalidade que uma análise matemática mais aprofundada permitiria conferir-lhes.

2. FILOSOFIA DO MÉTODO IMPLÍCITO-EXPLÍCITO

O método de cuja aplicação se apresentam neste artigo alguns resultados, procura conjugar as duas vias anteriores e visa resolver deficiências conhecidas noutros métodos, os quais se reflectem entre outros nos seguintes aspectos:

— incapacidade de tratar geometrias arbitrárias que podem variar no tempo (como é o caso, por exemplo, dos escoamentos com superfície livre)
— excessivo tempo de cálculo e/ou excessiva exigência de memória no computador
— facilidade de programação e adaptação a problemas específicos.

A dificuldade de adaptação a geometrias arbitrárias, e sobretudo a geometrias variáveis no tempo, é típica dos métodos implícitos e também dos do tipo elementos finitos. Tal facilidade existe nos métodos explícitos, mas as suas características quanto a estabilidade são deficientes.

Em termos de memória e tempo de cálculo, o método de elementos finitos é em geral o mais exigente sem contrapartida apreciável na precisão mas facilidade na geometria. Os métodos implícitos menos exigentes em memória e tempo de cálculo têm geralmente grandes vantagens em problemas de escoamentos a números de Reynolds elevados. Tanto num como noutro caso, surgem com frequência problemas de estabilidade numérica devido ao mau condicionamento das matrizes finais, o qual aumenta em geral com o refinamento da malha.

O método implícito-explícito, aplicável a sistemas de segunda ordem, baseia-se numa separação da malha em duas submalhas, uma das quais assente nos nós cuja numeração é ímpar, outra naqueles cuja numeração é par. Nestas condições, um qualquer ponto interior par fica rodeado de pontos cuja numeração é ímpar e vice-versa. O cálculo é efectuado a partir dos valores iniciais, calculando os valores no instante seguinte em nós pares (ou ímpares) usando um método explícito. Os valores correspondentes a esse instante nos nós ímpares (ou pares) é feito usando um esquema implícito. Todavia, se a equação é de segunda ordem e o esquema usa apenas diferenças centrais, verifica-se que usando os valores calculados no passo explícito para as incógnitas que surgem no implícito, a matriz das incógnitas se reduz neste à forma diagonal, pelo que as mesmas se obtêm directamente. Obtidos os valores em todos os nós correspondentes ao instante a seguir ao inicial, o cálculo procede do modo habitual mas alternando os pontos em que se efectua o cálculo por um esquema explícito. Tal alternância torna o esquema equivalente ao de Dufort-Frankel para a equação de calor (que é intrinsecamente estável) embora não exija a memorização de dois níveis no tempo.

Na sua aplicação prática o esquema adapta-se facilmente a geometria variável, é mais rápido que os métodos implícitos conhecidos e revela em muitos casos estabilidade e precisão superiores.

3. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A informação necessária para a resolução de um problema consiste nas condições iniciais e fronteira, além das propriedades físicas. O programa testa todos os pontos, identificando os que constituem a fronteira e o interior em cada instante. De acordo com os resultados do cálculo, a fronteira pode mover-se. Na sua forma geral, o programa pode tratar qualquer número de equações em duas ou três dimensões do espaço.

A título exemplificativo considera-se o caso dum escoamento bidimensional transiente. As equações de Navier-Stokes são resolvidas na forma perturbada descrita em [1] e [2].

O primeiro exemplo refere-se ao escoamento em torno de um triângulo, o segundo ao escoamento sobre uma cavidade. Em ambos os casos o valor de Re é igual a 6 e os vectores representados indicam o valor da velocidade.

O programa existe disponível no C.T.A.M.F.U.L.

REFERÊNCIAS:

[1] J. J. D. Domingos — A Perturbed Form of the Compressible Navier-Stokes Equations Suitable for Numerical Computations. DTA RC/20.

[2] J. J. D. Domingos, L. F. C. Roriz — Solução Numérica das Equações Completas de Navier-Stokes em Domínios de Geometria Arbitrária. (1.º Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada, Lisboa). DTA RC/34.

[3] J. J. D. Domingos, L. F. C. Roriz — Solução Numérica de Sistemas de Equações às Derivadas Parciais não Lineares de Tipo Parabólico em Domínios de Geometria Arbitrária por um Método Expícito-Implícito. DTA RC/35.

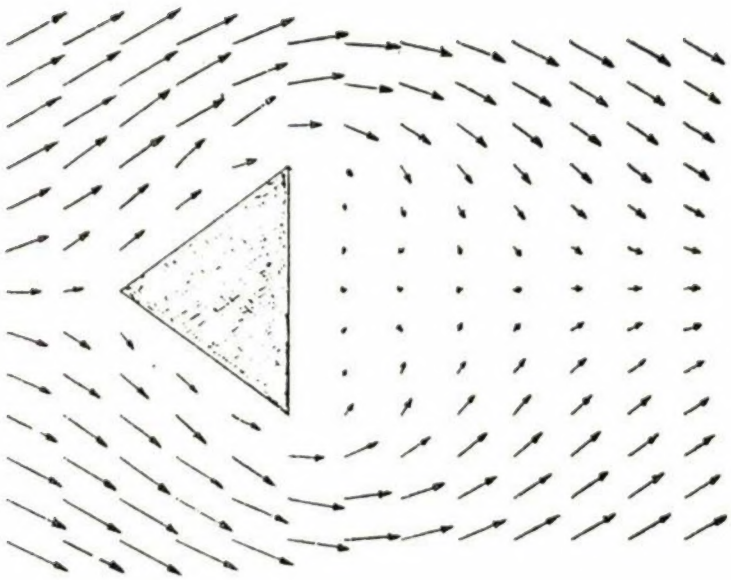


Figura 1-A — Escoamento em torno dum triângulo

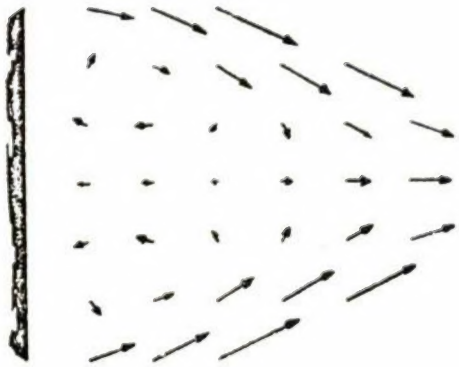


Figura 1-B — Pormenor do escoamento, na zona posterior do triângulo

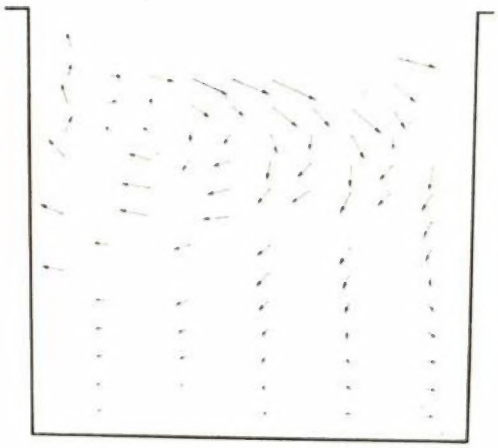


Figura 2-A — Escoamento na cavidade

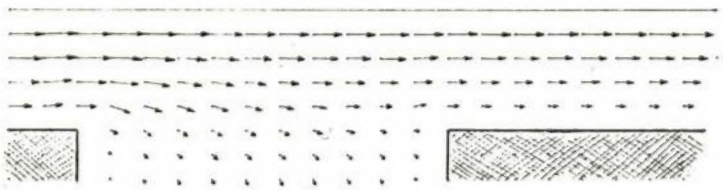


Figura 2-B — Escoamento na zona superior à cavidade

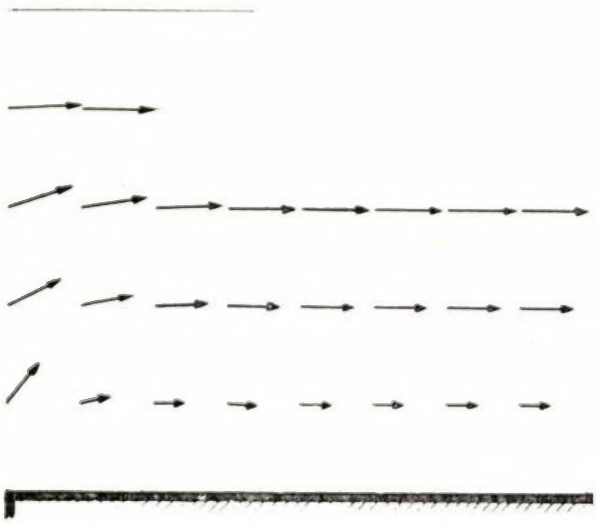


Figura 2-C — Pormenor do escoamento na zona à saída da cavidade

NÚMERO 437 DEZEMBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII

C. D. U. 518.1

O método dos elementos finitos

HEITOR LOBATO GIRÃO PINA
Professor Auxiliar do I. S. T.
Bolseiro do C. T. A. M. F. U. L.

RESUMO

Neste artigo faz-se uma introdução ao método dos elementos finitos, descrevendo as suas principais características que o tornam distinto dos outros métodos de solução de equações diferenciais.

ABSTRACT

This paper presents the finite element method in an introductory way and describes its principal features which distinguishes it from other methods for solving differential equations.

1. INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos (designado aqui abreviadamente por MEF) foi usado pela primeira vez por Courant em 1943 [5], no estudo de problemas de torsão e por Prager e Synge em 1947 [14] no domínio da elasticidade.

Contudo o método só se começou a tornar popular a partir da sua redescoberta no âmbito dos problemas de estruturas no final da década de 50 [9]. De facto, o método exige vasta manipulação aritmética pelo que o seu sucesso dependeu e ainda depende do desenvolvimento dos computadores digitais de larga capacidade. Não é assim de estranhar que os trabalhos pioneiros de Courant e Prager e Synge não tenham tido de imediato a continuação que mereciam. Foi preciso aguardar a chegada dos primeiros grandes computadores na década de 60 para que o MEF pudesse florescer em toda a sua potencialidade.

Embora o método se tenha desenvolvido para resolução de problemas estruturais não tardou muito a reconhecer-se-lhe um âmbito mais geral. Assim hoje é considerado um método de solução de equações diferências, ombreando e competindo neste domínio com o método das diferenças finitas. Esta fase coincidiu com a «matematização» do MEF (ver, por exemplo, as referências [1, 2, 3, 11, 12, 13, 15, 17] para uma apresentação rigorosa do método).

O presente artigo tem um carácter de divulgação pelo que as preocupações didáticas sobrelevarão os aspectos mais matemáticos, não havendo pretensão alguma em se ser completo ou exaustivo.

2. MOTIVAÇÃO

Neste parágrafo apresentamos um exemplo muito simples para mostrar como aparece e funciona o MEF. Imaginemos que queríamos resolver o seguinte problema: calcular a deformação e as tensões numa viga simplesmente apoiada (ver figura 1) submetida a uma carga vertical uniforme p.

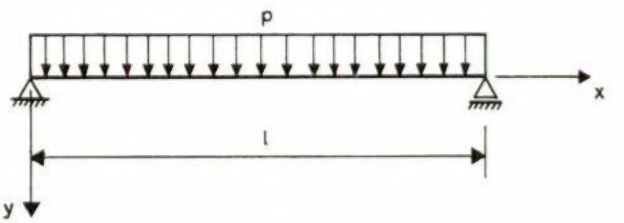


Fig. 1

Como sabemos a equação da flexão simples de vigas aplicável a este caso é:

$$E\,I\,\frac{d^4u}{dx^4} = p \qquad (2.1)$$

em que os símbolos significam o seguinte:

E — módulo de Young
I — momento de inércia
u — deslocamento vertical
x — coordenada em relação ao apoio esquerdo
p — carga sobre a viga

Uma vez conhecida a função $u(x)$ podem calcular-se as extensões e a partir da lei de Hooke as respectivas tensões.

No caso presente a integração da equação com as condições aos limites

$$u(o) = 0, \quad u(l) = 0 \tag{2.2}$$

não oferece quaisquer dificuldades. A solução que aparece em qualquer livro de Resistência de Materiais, é

$$u = \frac{1}{24} \frac{p}{EI} (l^3 - 2lx^2 + x^3) \tag{2.3}$$

Como é que resolveríamos este problema se em vez de termos condições tão simples como as que existem neste caso, tivessem, por exemplo, uma distribuição de cargas mais complicada, propriedades elásticas variáveis (i.e. E ser função de x), geometria, variável (i.e. I ser também função de x), etc., de modo que não soubéssemos integrar a equação diferencial (2.1)?

A pista é-nos fornecida pela observação de que a solução de (2.1) é a função $u(x)$ que minimiza o seguinte funcional

$$J(v) = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^l p(x)\, v dx \tag{2.4}$$

sujeito às condições de fronteira (2.2). Quer isto dizer que se u for a solução de (2.1) com (2.2) como restrições então

$$J(u) < J(v) \tag{2.5}$$

para todo o função v tal que $v(o) = v(l) = o$ e que seja admissível. Veremos mais adiante o significado preciso deste termo. Por enquanto basta-nos observar que as funções v devem ser contínuas e possuir derivada contínua, pois caso contrário a viga não suportaria as cargas impostas.

Notemos que o primeiro termo de (2.4) representa a energia elástica da viga e o segundo termo o trabalho das forças aplicadas, pelo que em termos físicos o princípio enunciado e simbolizado em (2.5) mais não é que o princípio do trabalho virtual: em equilíbrio o trabalho virtual das forças aplicadas é igual à variação de energia elástica.

Agora temos à disposição duas vias para resolver o nosso problema: o da integração da equação diferencial e a minimização do funcional associado. Como admitimos, para efeitos de exposição, que a primeira não é praticável vejamos como podemos aproveitar a segunda.

Uma das formas de o conseguir é propor uma função $v(x)$ para o deslocamento em que haja parâmetros livres e minimizar relativamente a esses parâmetros. Concretizemos um pouco.

Suponhamos que a função

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \tag{2.6}$$

era proposta como representando aproximadamente o deslocamento da viga. (Notemos de passagem que um polinómio de grau inferior a dois não seria aceitável para o caso vertente pois que, com as condições de apoio (2.2), à função $v(x)$ reduzir-se-ia ao caso trivial $v(x) \equiv o$.)

Os valores de a_1, a_2 e a_3 serão determinados de forma a que $v(x)$ dado por (2.6) minimize a funcional $J(v)$ sujeita aos constrangimentos implicados pelas condições de apoio. Como

$$\frac{dv}{dx} = a_2 + 2a_3 x \quad , \quad \frac{d^2v}{dx^2} = 2a_3 \tag{2.7}$$

temos que

$$J(v) = \int_0^l EI(2a_3)^2 dx - \int_0^l p(a_1 + a_2 x + a_3 x^2) dx \tag{2.8}$$

ou seja

$$J(v) = 4EI\, a_3^2 - p\, a_1\, l + a_2 \frac{l^2}{2} + a_3 \frac{l^3}{3} \tag{2.9}$$

Os constrangimentos são

$$a_1 = 0, \quad a_1 + a_2 l + a_3 l^2 = 0 \tag{2.10}$$

A pesquisa do mínimo de $J(v)$ dado por (2.9) constrangido a (2.10) pode ser feita usando a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Esta consiste na formação do funcional modificado $J^*(v, \lambda)$ dada por

$$J^*(v,\lambda) = J(v) - \lambda_1(a_1) - \lambda_2(a_1 + a_2 l + a_3 l^2) \tag{2.11}$$

que deve ser minimizado sem constrangimento. Os λ's são conhecidos, como se sabe, pela designação de multiplicadores de Lagrange. Então devemos ter que

$$\frac{\partial J^*}{\partial a_1} = \frac{\partial J^*}{\partial a_2} = \frac{\partial J^*}{\partial a_3} = \frac{\partial J^*}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial J^*}{\partial \lambda_2} = 0 \tag{2.12}$$

no ponto mínimo. Estas expressões fornecem o seguinte sistema de equações lineares

$$8EIa_3 - l^2\lambda_2 = \frac{pl^3}{3} \tag{2.13a}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = pl \tag{2.13b}$$

$$l\lambda_2 = \frac{pl^2}{2} \tag{2.13c}$$

$$a_1 = 0 \tag{2.13d}$$

$$a_1 + la_2 + l^2 a_3 = 0 \tag{2.13e}$$

A natureza dos multiplicadores de Lagrange torna-se clara a partir da análise das equações (2.13b, c). A soma de $\lambda_1 + \lambda_2$ é igual à carga total sobre a viga (pl) e $l\lambda_2$ é igual ao momento flector relativo ao apoio esquerdo ou direito. (Esta ambiguidade é resultante de o problema que estamos considerando ser totalmente simétrico). Não é difícil pois verificar que os λ's não são mais que as reacções de apoio.

É vantajoso escrever as equações (2.13) sob a forma matricial. Teremos assim

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8EI & 0 & -l^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \hline \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ pl^3/3 \\ \hline pl \\ pl^2/2 \end{array}\right] \tag{2.14}$$

Estamos na presença de um sistema de 5 equações a 5 incógnitas: 3 «deslocamentos» a_1, a_2 e a_3 e 2 «reacções» λ_1 e λ_2. Para evidenciar a natureza distinta destas variáveis particionámos a matriz acima em conformidade. Não é difícil ver que o sistema (2.14) tem solução única como aliás a situação física exige, sendo possível demonstrar que tal deve acontecer. Após a determinação dos a's temos à nossa disposição uma função que descreve aproximadamente (assim o esperamos) a deformação da viga. Com este dado podemos calcular as extensões e tensões que lhe estão associadas. O problema está em princípio resolvido. Há no entanto vários aperfeiçoamentos desejáveis.

Em primeiro lugar não é claro qual o significado físico a atribuir aos coeficientes a_1, a_2 e a_3. Em segundo lugar as incógnitas a's e λ's aparecem misturadas no sistema (2.14). Ambas estas desvantagens podem ser resolvidas usando outras funções em vez do polinómio (2.6). Consideremos que

$$v = \psi_1(x) q_1 + \psi_2(x) q_2 + \psi_3(x) q_3 \tag{2.15}$$

com

$$\psi_1(x) = \left(1 - \frac{2x}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right) \tag{2.16a}$$

$$\psi_2(x) = \frac{4x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \tag{2.16b}$$

$$\psi_3(x) = \frac{x}{l}\left(\frac{2x}{l} - 1\right) \tag{2.16c}$$

A função v continua a ser um polinómio do 2.º grau com três parâmetros q_1, q_2 e q_3 livres. A diferença reside nas funções $\psi(x)$ que os afectam. Concentrando-nos sobre a função ψ_1 verificamos que ela se anula para $x = \frac{l}{2}$ e $x = l$ e toma o valor um para $x = 0$. Podemos dizer que ela representa um «*modo*» de deformação unitário da viga, em que os pontos médio e o apoio direito permanecem como *nodos*, i.e., imóveis. Similarmente para ψ_2 e ψ_3 que são deformações unitárias dos modo central e do apoio direito, respectivamente. A sobreposição destes três modos de deformação de acordo com (2.15) dá a defrmação da viga. Podemos repetir agora os cálculos que fizemos atrás. Aproveitaremos contudo toda a simplicidade da notação e álgebra matricial para abreviar as expressões. Assim se representarmos por $\{.\}$ um vector-coluna e $\{.\}^\tau$ o seu transposto (vector-linha) e $[.]$ uma matriz, teremos (2.14) escrita desta forma

e por sua vez

$$u = \{x\}^\tau \{q\} \tag{2.17}$$

$$\frac{du}{dx} = \left\{\frac{d\psi}{dx}\right\}^\tau \{q\} = \{\psi'\}^\tau \{q\} \tag{2.18a}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \left\{\frac{d^2\psi}{dx^2}\right\}^\tau \{q\} = \{\psi''\}^\tau \{q\} \tag{2.18b}$$

obtendo-se facilmente por substituição,

$$J(v) = \int_0^l \frac{EI}{2} \{q\}^\tau \{\psi''\} \{\psi''\}^\tau \{q\} dx - \int_0^l p\{\psi\}^\tau \{q\} dx \tag{2.19}$$

Se pusermos

$$[K] = \int_0^l EI \{\psi''\} \{\psi''\}^\tau dx \tag{2.20a}$$

$$\{f\} = \int_0^l p\{\psi\} dx \tag{2.20b}$$

a expressão (2.19) escreve-se simplesmente

$$J(v) = \frac{1}{2}\{q\}^\tau [K] \{q\} - \{q\}^\tau \{f\} \tag{2.21}$$

À matriz [K] chamaremos matriz de rigidez e ao vector-coluna {f} vector das forças aplicadas equivalentes. Adiante justificaremos estas designações. Notemos apenas que [K] é simétrica como resultado de (2.20a).

As condições nos apoios escrevem-se agora

$$\{\psi(0)\}^{\tau}\{q\} = 0, \ \{\psi(1)\}^{\tau}\{q\} = 0 \qquad (2.22)$$

Agrupando estas duas equações podemos por que

$$[B]\{q\} = 0 \qquad (2.23)$$

em que [B] é no presente caso uma matriz de 2×3 cuja primeira linha é o vector $\{\psi(0)\}^{\tau}$ e cuja segunda linha é o vector $\{\psi^1\}^{\tau}$.

O funcional modificado pela introdução dos multiplicadores de Lagrange toma agora a forma

$$J^*(v,\lambda) = J(v) - \{\lambda\}^{\tau}[B]\{q\} \qquad (2.24)$$

em que $\{\lambda\}$ é o vector-coluna dos multiplicadores de Lagrange. A minimização não constrangida de $J^*(v,\lambda)$ segue os mesmos trâmites que atrás, obtendo-se no final as seguintes equações

$$[K]\{q\} + [B]^{\tau}\{\lambda\} = \{f\} \qquad (2.25a)$$

$$[B]\{\lambda\} = 0 \qquad (2.25b)$$

Estes dois sistemas podem escrever-se como um só,

$$\begin{bmatrix} K & B^{\tau} \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ O \end{bmatrix} \qquad (2.26)$$

Observemos que a matriz do primeiro membro continua a ser uma matriz simétrica, o que não acontecia em (2.14). Isto é uma vantagem que se apreciaria devidamente quando, em vez de 5 incógnitas que o problema actual tem, estivéssemos a resolver um em que aquele número ascendia às centenas ou milhares. A economia de memória e de tempo de cálculo pode ser neste caso substancial. Após a solução de (2.26) obteríamos os deslocamentos nodais $\{q\}$ e as reacções $\{\lambda\}$.

Em relação à segunda desvantagem apontada atrás é fácil de ver que é possível rearranjar o sistema (2.26) por troca a ordem das equações de forma a poder calcular o vector $\{q\}$ primeiro e seguidamente o vector $\{\lambda\}$. Isto significa resolver um sistema de 3 equações primeiro e depois um de 2 equações o que é mais fácil do que resolver um sistema de 5 equações de uma só vez. (Outra vantagem será referida mais adiante).

Fazendo o ponto da situação dizemos que estamos na posse de um método aproximado de resolver a equação das vigas elásticas. A maior ou menor aproximação dependerá do grau do polinómio utilizado. Embora não tivessemos feito a demonstração formal deste facto, dado que qualquer função contínua pode ser aproximada com um erro arbitrariamente pequeno por um polinómio de acordo com o teorema de Weirstrass, aquela conclusão é plausível. Remetemos o leitor interessado para as referências citadas.

Contudo, aqui aparece uma limitação grave ao método. À medida que o grau do polinómio aproximador cresce, a matriz [K] do sistema começa a tornar-se quase singular e muito difícil de inverter, originando erros enormes nos valores das incógnitas $\{q\}$ e $\{\lambda\}$, ao ponto de tornar os seus valores sem significado. E para isto acontecer não é preciso ir muito longe. Polinómios de grau 10 são suficientes já para denunciar este comportamento. Sendo assim o método de minimização da funcional usando polinómios como funções aproximadoras que parecia tão geral acaba por ser aplicável apenas a problemas de pequena dimensão. É aqui que entra em cena o MEF.

3. O MEF UNIDIMENSIONAL

Uma maneira de obviar o inconveniente apontado atrás é o de considerar a viga como sendo constituída por elementos cada um dos quais é dotado com uma função aproximadora do tipo polinomial usado em 2. Estas funções definidas por troços deverão possuir a necessária continuidade. Nascem assim os elementos finitos. Para exemplificação suponhamos a viga dividida em dois elementos cada um dos quais definido por dois nodos (ver figura 2).

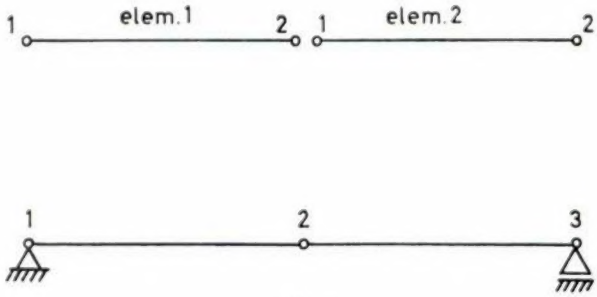


Fig. 2

No presente caso há que escolher funções que nos nodos comuns a dois elementos sejam contínuas e possuam primeira derivada contínua nesses nodos. Os polinómios de Hermite satisfazem estes requisitos. Assim para o elemento 1 usaremos as funções

$$\psi_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \qquad \text{com } \xi = 2x/l \qquad (3.1a)$$

$$\psi_2(\xi) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\frac{l^2}{4} \qquad (3.1b)$$

$$\psi_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \qquad (3.1c)$$

$$\psi_4(\xi) = -(\xi^2 - \xi^3)\frac{l^2}{4} \qquad (3.1d)$$

Teremos portanto que para este elemento

$$v_1 = \{\psi\}_1\{q\}_1 \qquad (3.2a)$$

Notemos que o 1.º parâmetro do elemento 1 $(q_1)_1$ está associado a um deslocamento unitário do nodo 1 e o 2.º parâmetro do mesmo elemento $(q_2)_1$ a uma rotação unitária do mesmo nodo. O 3.º e 4.º parâmetros estão associados a um deslocamento e rotação unitários, respectivamente, do nodo 2. Este caso é um exemplo em que há 2 parâmetros por nodo, sendo costume falar-se em *2 graus de liberdade* por nodo.

Para o elemento 2 teríamos uma situação similar, i.e.,

$$v_2 = \{\psi\}_2 \{q\}_2 \tag{3.2b}$$

A continuidade da função v no nodo 2,

$$v_1 = v_2 \tag{3.3a}$$

(no nodo 2)

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx} \tag{3.b}$$

implicam, como é fácil ver, que

$$(q_3)_1 = (q_4)_1, \quad (q_1)_2 = (q_2)_2 \tag{3.4}$$

Estas igualdades são verificadas automaticamente se identificarmos o nodo comum como um único nodo. Na prática isto consegue-se usando, conjuntamente com a numeração dos nodos a nível de elemento, uma numeração global (ver figura 2).

Obtivemos deste modo uma função v definida por elementos, ou seja,

$$v = v_1 \text{ para } u < x < 1/2 \tag{3.5a}$$

$$v = v_2 \text{ para } 1/2 < x < 1 \tag{3.5b}$$

Podemos introduzi-la no funcional J(v) e repetir os cálculos da maneira praticada no parágrafo anterior. Surge aqui uma simplificação notável que é a dos integrais em (2.4) poderem ser calculados elemento a elemento e somadas as contribuições de cada elemento no fim. Quer dizer que obteríamos para os elementos 1 e 2 as matrizes de rigidez $[K]_1$ e $[K]_2$ e os vectores forças $\{f\}_1$ e $\{f\}_2$. A matriz de rigidez global [K]será obtida a partir das matrizes elementares da forma seguinte. Para os nodos 1 e 3 apenas contribuem os elementos 1 e 2, respectivamente, enquanto que para o nodo 2 ambos os elementos contribuem. Esquematicamente, podemos representar o processo de formação da matriz global ou assemblagem na forma que a figura 3 descreve.

Obtém-se assim um sistema de 6 equações (3 nodos ×2 graus de liberdade por nodo) ao qual se deve juntar as 2 equações que traduzem as condições de apoio. É possível rearranjar as equações de forma a que as reacções nos apoios possam ser determinadas posteriormente ao cálculo dos deslocamentos {q}. Isto permite utilizar o facto de que a matriz de rigidez tem uma estrutura em banda simétrica para economizar em memória e tempo de cálculo.

O processo de melhoria de precisão é conseguido agora pelo aumento do número de elementos, em vez de aumentar o grau dos polinómios usados.

$$[k]\ \{q\} = \{f\}$$

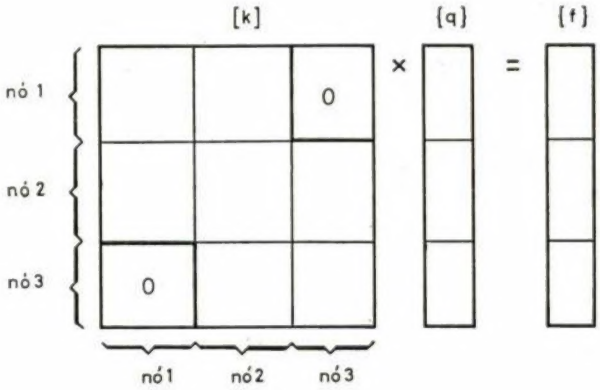


Fig. 3

4. UM CASO BIDIMENSIONAL

Neste parágrafo vamos mostrar como é que se pode usar o MEF quando o problema é pluridimensional. Utilizaremos para ilustração o problema da condução de calor em sólidos isótropos.

Seja Ω um domínio (limitado) no plano euclideano e $\partial\Omega$ a sua fronteira, que suporemos constituída por duas partes $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ dijuntas (ver figura 4). A equação que rege a condução de valor é, como se sabe, a equação de Poisson.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g \quad \text{em } \Omega \tag{4.1a}$$

$$u = \alpha \quad \text{em } \partial\Omega_1 \tag{4.1b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \gamma \text{ em } \partial\Omega_2 \tag{4.1c}$$

em que os símbolos significam o seguinte:

u — temperatura
x,y — coordenadas cartesianas
g — potência das fontes de calor
α — temperatura imposta na fronteira $\partial\Omega_1$
n — normal exterior à fronteira $\partial\Omega_2$
α, β e γ são funções de x,y mas não de u.

As equações (4.1a) e (4.1b) traduzem as condições de fronteira. A primeira é uma condição de temperatura imposta e a segunda de fluxo de calor imposto.

É possível provar que a minimização do funcional

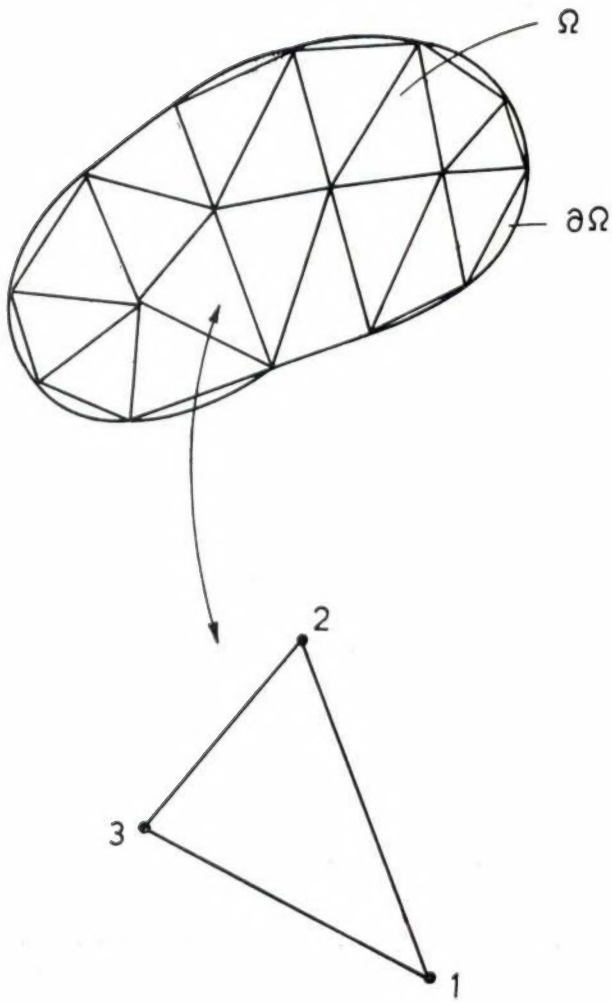


Fig. 4

$$J(v) = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] dA - 2\int_{\Omega} fv dA + \int_{\partial\Omega_2} \beta v^2 \, ds - 2\int_{\partial\Omega_2} \gamma v \, ds \tag{4.2}$$

conduz à equação (4.1a), desde que se tome como classe de funções v admissíveis a classe das funções contínuas que verificam a condição de fronteira (4.1b). Pelo facto de esta condição ter de ser imposta às funções v, condições de fronteira deste tipo dizem-se essenciais. As condições de fronteira do tipo (4.1c), pelo contrário, não necessitam de ser impostas às funções v, sendo automaticamente verificadas pela função u que minimiza J(v). Dizem-se por isso naturais.

Notemos que agora as funções aproximadoras só precisam de ser contínuas, podendo as suas derivadas de 1.ª ordem serem descontínuas. Este é uma consequência do facto de que a equação de Poisson (4.1a) é de 2.ª ordem e o funcional (4.2) envolve apenas as 1.ªs derivadas. Recordemos que no exemplo da viga a equação diferencial era de 4.ª ordem e o funcional envolvia a 2.ª derivada.

A utilização de polinómios em x e y sofre das mesmas desvantagens que evidenciamos atrás, acrescidas ainda do facto que agora a verificação de condições de fronteira do tipo (4.1b) não ser, em geral, nada fácil.

Vamos ver como é que se podem construir elementos finitos bidimensionais. O elemento bidimensional mais simples é o triângulo (ver figura 4), sendo o domínio Ω facilmente dividido em triângulos. É claro que se a fronteira for curva haverá aí uma aproximação tanto melhor quanto mais fina for a malha de elementos finitos usada. No caso de uma fronteira poligonal a cobertura do domínio for elementos finitos triangulares será perfeita.

Vejamos agora como se constrói a função v(x,y) em cada elemento. A hipótese que se sugere como mais natural é o polinómio de 1.º grau

$$v(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y = \{p(x,y)\}^T \{a\} \tag{4.3}$$

Os parâmetros {a} poderão ser calculados em função de valores nodais. Tomando para nodos os três vértices do triângulo e estabelecendo para cada um deles uma equação do tipo (4.3) obtém-se o sistema

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

em que q_i representa a temperatura no nodo i.

Em linguagem matricial

$$\{q\} = [A]\,\{a\} \tag{4.5}$$

Se o triângulo não for degenerado, i.e., os vértices não forem colineares, [A] é invertível e podem escrever

$$\{a\} = [A]^{-1}\,\{q\} \tag{4.6}$$

Então

$$v = \{p(x,y)\}^T [A]^{-1}\,\{q\} \tag{4.7}$$

Pondo

$$\{q(x,y)\}^T [A]^{-1} = \{\psi(x,y)\}^T \tag{4.8}$$

obtemos uma expressão já nossa conhecida

$$v(x,y) = \{\psi(x,y)\}^T \{q\} \tag{4.9}$$

Cada um dos polinómios do 1.º grau ψ_i (x,y) representa um deslocamento unitário do nodo i com deslocamentos nulos dos outros dois nodos.

É agora fácil obter

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} (x,y) \right\}^{\tau} \{q\} \qquad (4.10a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} (x,y) \right\}^{\tau} \{q\} \qquad (4.10b)$$

É conveniente por

$$\{\partial\psi\}^{\tau} = \left\{ \frac{\partial y}{\partial x} (x,y) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} (x,y) \right\}^{\tau} \qquad (4.11)$$

de forma que

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \{q\} \{\partial\psi\} \{\partial\psi\}^{\tau} \{q\} \qquad (4.12)$$

Antes de prosseguir temos que verificar se as funções assim construídas são contínuas quando se passa de um elemento a outro. Como v(x,y) é linear em todo o elemento, é-o também em qualquer das arestas. Fica aí portanto determinada pelos seus valores nos nodos (vértices) que definem essa aresta. Identificando os valores nodais de nós comuns a elementos adjacentes a continuidade pretendida é assegurada. Concluimos pois estar na presença de funções admissíveis no funcional J(v).

A substituição na expressão (4.2) de (4.9) e (4.12) permite escrever, à semelhança de (2.19),

$$J(v) = \{q\}^{\tau} \int_{\Omega} \{\partial\psi\} \{\partial\psi\}^{\tau} dA \{q\} - 2\{q\}^{\tau} \int_{\Omega} f\{\psi\} dA + \{q\}^{\tau} \int_{\partial\Omega_2} \beta\{\psi\} \{\psi\}^{\tau} ds - 2 \{q\}^{\tau} \int_{\partial\Omega_2} \gamma \{\psi\} ds \qquad (4.13)$$

Pondo

$$[K] = \int_{\Omega} \{\partial\psi\} \{\partial\psi\}^{\tau} dA + \int_{\partial\Omega_2} \beta\{\psi\} \{\psi\}^{\tau} ds \qquad (4.14a)$$

$$\{f\} = \int_{\Omega} f \{\psi\} dA + \int_{\partial\Omega_2} \gamma\{\psi\} ds \qquad (4.14b)$$

obtemos para J(v) uma expressão idêntica à (2.21). O proseguimento do cálculo, i.e., assemblagem, imposição das condições de fronteira essenciais, etc., segue o mesmo caminho que no parágrafo 2, pelo que nos dispensaremos de o repetir aqui. No final teremos um sistema de equações lineares cuja solução nos dá o valor das temperaturas nos nodos.

Convém notar que em muitos casos os integrais em (4.14) não são calculados analiticamente, mas sim, numericamente.

5. PROBLEMAS MATEMÁTICOS DO MEF

Até aqui temos vindo a expor o MEF sem preocupação de rigor matemático. Convém no entanto alertar o leitor para os seguintes pontos que é preciso ter em atenção na justificação do método:

a) — em primeiro lugar a escolha das funções base $\{\psi\}$, a sua continuidade e admissibilidade relativamente ao funcional J(v)

b) — em segundo lugar a demonstração da existência e unicidade da solução

c) — em terceiro lugar a demonstração da convergência e estimativa de limites superiores do erro

d) — influência do uso de integração numérica, se for caso disso, nos resultados

e) — influência do uso de aritmética de precisão finita nos resultados.

Para a resolução destes problemas e outros devem consultar-se, por exemplo, as referências [1, 3, 15, 17].

6. IMPLEMENTAÇÃO EM COMPUTADOR

É óbvio do que ficou dito nos parágrafos anteriores que o MEF só é praticável dispondo de um programa de faça os cálculos que o método requer. Descreveremos em seguida a organização básica de um programa de elementos finitos. Assim um programa deve permitir a:

a) Preparação de dados. O MEF requer mesmo para problemas de reduzida dimensão um volume de dados apreciável (malha e descrição de elementos, coordenadas nodais, propriedades materiais, condições de fronteira, etc.). É conveniente dispor de rotinas que façam a maior parte possível deste trabalho.

b) Verificação de dados. É indispensável uma verificação tão exaustiva quanto possível dos dados. Isto evitará o prosseguimento do programa com dados errados com os inconvenientes que facilmente se advinham (desperdício de tempo de computador, possibilidade de o erro não ser detectado e os resultados tomados como verdadeiros, etc.).

c) Formação da matriz e vector de forças para cada elemento. Esta é a primeira fase de cálculo propriamente dito. Utilizando as expressões pertinentes calculam-se as matrizes de rigidez e os vectores das forças nodais elemento a elemento. Para alguns elementos as integrações têm de ser feitas numericamente, i.e., são substituídas por somatórios ponderados apropriados. As informações necessárias nesta fase e relativas às características dos elementos a usar devem encontrar-se incorporadas naquilo a que se costuma designar por biblioteca de elementos.

d) Assemblagem. Esta é a rotina que forma o sistema de equações final por assemblagem das matrizes de rigidez e vectores força elemento a elemento. Duas vias podem ser seguidas. Se o problema cabe todo em memória a assemblagem pode ser feita à medida que as matrizes de rigidez e vectores de força forem sendo calculados. Caso a dimensão do

problema não permita este procedimento devem estes armazenar-se em bandas ou discos magnéticos para que a rotina de assemblagem os possa ir lá ler.

e) Solução do sistema de equações. Um programa de elementos finitos depende em elevado grau da qualidade das suas subrotinas para a solução de sistema de equações lineares. Estas devem permitir a solução em memória ou por blocos e devem tirar partido da estrutura (banda, simetria, etc.) da matriz de rigidez global. A rapidez desta fase à muito importante e a precisão dos resultados é um ponto crítico.

f) Saídas. Após a obtenção dos valores nodais podem calcular-se quantidades de interesse (tensões, fluxos, etc.). Esse é o objectivo das rotinas de saída.

g) Pós-processadores. O volume de resultados é geralmente muito grande e nem sempre facilmente absorvível na forma numérica. É assim muito útil dispor de saídas gráficas, em «plotters» ou «displays» ópticos.

Com todos estes requisitos não admira que os programas de elementos finitos «a sério» atinjam as dezenas de milhares de instruções em FORTRAN.

As referências [4, 6, 7, 8, 9, 10, 18] contem descrição detalhada de forma de aplicar o MEF a problemas de estruturas, condução de calor, mecânica de fluidos, etc. e da sua implementação prática.

REFERENCIAS

1 — Aubin, J. P.: Approximation of Elliptic Boundary Value Problems, Wiley, 1972.

2 — Arantes e Oliveira, E.: Theoretical Foundations of the Finite Element Method, Memória n.º 384, LNEC.

3 — Aziz, A. K., ed.: The Matematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, Academic Press, 1972.

4 — Cook, R. D.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Wiley, 1974.

5 — Courant, R.: Variational Methods for the Solution of Equilibrium and Vibration, Bull. Am. Math. Soc., 49, 1-23, 1943.

6 — Desai, C. S. e Abel, J. F.: Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand, 1972.

7 — Galagher, R. H.: Finite Element Analysis, Prentice-Hall, 1975.

8 — Huebner, K. H.: The Finite Element Method for Engineers, Wiley, 1975.

9 — Martin, H. C. e Carey, G. F.: Introduction to Finite Element Analysis, McGraw-Hill, 1973.

10 — Norrie, D. H., e de Vries, G.: The Finite Element Method, Academic Press, 1973.

11 — Oden, J. T.: A General Theory of Finite Elements, Part 1. Topological Considerations, Int. J. Numerical Methods Eng., vol. 1, n.º 2, pp. 205-221.

12 — Oden, J. T.: A General Theory of Finite Elements, Part 2. Applications, Int. J. Numerical Methods Eng., vol. 1, n.º 3, pp. 247-259.

13 — Oden, J. T.: Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, 1972.

14 — Prager, N. e Synge, J. L.: Approximation in Elasticity Based on the Concept of Function Space, Quart. Appl. Math., 5, 241-269, 1974.

15 — Strang, G. e Fix, G. J.: An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, 1973.

16 — Turner, J. L., Clough, R. W., Martin, H. C. e Topp, L. J.: Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, J. Aero. Sci., vol. 23, n.º 9, pp. 805-825, 1956.

17 — Whiteman, J. R., ed.: The Mathematics of the Finite Element Method and Applications, Academic Press, 1973.

18 — Zienciewicz, O. E.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.

NÚMERO 437 DEZEMBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII

C. D. U. 621.154

O método das singularidades no estudo tri-dimensional do escoamento em turbomáquinas axiais[1]

A. F. DE O. FALCÃO [2]

SUMÁRIO

Apresentam-se os fundamentos do método das singularidades para representação do escoamento em turbomáquinas axiais. Em particular, descreve-se a aplicação dos métodos da linha e da superfície sustentadoras, para estudo do escoamento em cascatas rectilíneas de pás com geometria tri-dimensional.

SUMMARY

The use of singularity methods for the analysis of the flow in axial turbomachines is outlined. In particular, lifting-line and lifting-surface theories are employed to study the flow about a three-dimensional straight cascade of twisted blades.

1 — INTRODUÇÃO

O estudo teórico do escoamento através das coroas de pás fixas e rotativas das turbomáquinas axiais constitui um capítulo importante da aerodinâmica, devido ao vasto campo de aplicação deste tipo de máquinas (ventiladores, compressores, turbinas hidráulicas, de vapor e de gás). Acrescente-se que, por razões práticas, é em geral difícil obter resultados experimentais suficientemente pormenorizados que forneçam ao investigador e ao projectista uma imagem adequada do escoamento.

Sendo o perfil alar adoptado no fabrico da maioria das pás, não surpreende que o estudo teórico do escoamento neste tipo de máquinas tenha notáveis semelhanças com a teoria aerodinâmica da asa de avião, nem que muitos dos métodos teóricos desenvolvidos para este caso tenham sido utilizados posteriormente, com as necessárias modificações, no estudo daquele.

A par de tais semelhanças, existem consideráveis diferenças entre os dois casos, que tornam especialmente difícil o estudo do escoamento nas turbomáquinas. Em particular, mencionamos a interferência entre pás, a presença de paredes de forma mais ou menos complexa, e o carácter não permanente do escoamento devido à presença de pás fixas e móveis.

Quando as paredes de revolução são de forma aproximadamente cilíndrica, um dos métodos mais usuais de simplificação consiste em substituir, em cada ponto, o escoamento real tri-dimensional por um escoamento bi-dimensional plano em torno dum sistema infinito de pás dispostas paralelamente umas em relação às outras, com perfil, passo e posição relativa obtidos por planificação da superfície cilíndrica de revolução de raio r que passa pelo ponto considerado (Fig. 1). Este tipo de escoamento (cascata bi-dimensional rectilínea) tem sido objecto de numerosos trabalhos, e existem hoje métodos teóricos relativamente satisfatórios para a sua determinação (pelo menos nos casos de escoamento permanente incompressível ou subsónico), além de abundante documentação experimental (vejam-se, por exemplo, [1] e [2]).

Este método de redução do modelo tri-dimensional a outro bi-dimensional (blade element theory) não tem em conta a interferência entre as diferentes

(1) Comunicação apresentada ao Primeiro Congresso Nacional de Mecânica Teórica e Aplicada, Lisboa, Dezembro de 1974.
(2) Professor Extraordinário do Instituto Superior Técnico, Lisboa.

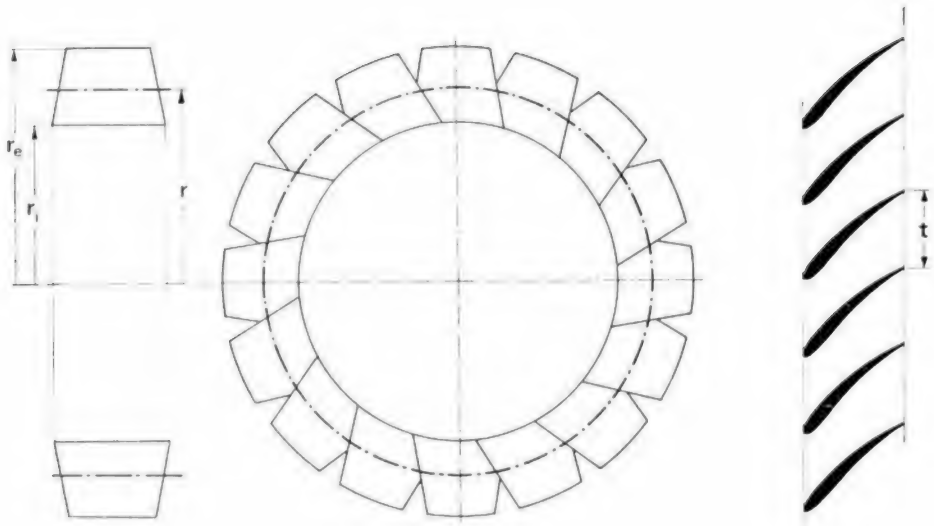


Fig. 1

superfícies de revolução (diversos valores de r), ou seja, parte da hipótese de que as linhas de corrente formam superfícies de corrente de revolução. Esta hipótese é em geral aceitável quando a relação r_i/r_e entre os diâmetros interior e exterior é próxima da unidade. O mesmo não sucede quando aquela relação é consideravelmente inferior à unidade, especialmente se a circulação do escoamento em torno de cada pá varia apreciavelmente ao longo desta. Neste último caso, o primeiro teorema de Helmholz mostra que existe um rasto de vórtices (trailing vortices), semelhantes aos que ocorrem no escoamento em torno duma asa de envergadura finita. Tais vórtices induzem um campo de velocidades caracteristicamente tri-dimensional, cujo estudo teórico constitui o principal objectivo deste trabalho.

2 — MÉTODO DAS SINGULARIDADES

Consideremos o escoamento bi-dimensional plano em torno duma asa de envergadura infinita (ou limitada por duas paredes planas perpendiculares ao seu eixo longitudinal). Se a asa for substituida por um vórtice rectilíneo com igual circulação, a força de sustentação por unidade de envergadura não é alterada, e, a uma distância suficientemente grande comparada com as dimensões do perfil, os dois escoamentos são aproximadamente idênticos. Se pretendermos porém uma representação mais adequada na vizinhança da asa, teremos que recorrer a sistemas mais complexos de singularidades. Para escoamento não viscoso, um método exacto consiste em substituir a asa por uma distribuição de vórtices perpendiculares ao plano do escoamento, tendo como directriz o perfil da asa. Um método mais simples, que dá uma aproximação relativamente satisfatória para perfis delgados com curvatura e ângulo de ataque pequenos, consiste em tomar a corda do perfil como directriz das linhas de singularidades (vórtices, fontes e poços). Estes métodos foram posteriormente aplicados ao escoamento bi-dimensional em torno duma cascata rectilínea de pás. Em particular, citam-se os trabalhos fundamentais de Schlichting [3], utilizando o segundo dos métodos referidos, e de Martensen [4], baseado no primeiro, que permitem, para uma dada geometria, determinar o campo de velocidades.

3 — TEORIA DA LINHA SUSTENTADORA

Para o caso tri-dimensional, uma das simplificações clássicas, primeiramente utilizada por Prandtl para o estudo da asa de envergadura finita, consiste em supor que os vórtices livres, que constituem o rasto de cada pá, têm a sua origem num único vórtice ligado à pá — linha sustentadora — cuja intensidade é igual à circulação total da pá na secção recta correspondente. Uma simplificação adicional, aceitável se é pequena a deflexão do escoamento pelas pás (o que em geral sucede nos ventiladores e compressores), consiste em considerar os vórtices livres do rasto como sendo convectados pelo escoamento não perturbado (escoamento na ausência de pás). Este método de linearização do problema significa, para escoamento permanente (pás fixas), que os vórtices livres coincidem com linhas de corrente do escoamento não perturbado. No caso de pás de um rotor, se o escoamento relativo é permanente, os vórtices livres coincidem com linhas de corrente rela-

tivas do escoamento não perturbado e têm formas aproximadamente helicoidais (Fig. 2).

que, no caso geral, o perfil, e portanto a circulação, não são constantes ao longo das pás. As linhas sus-

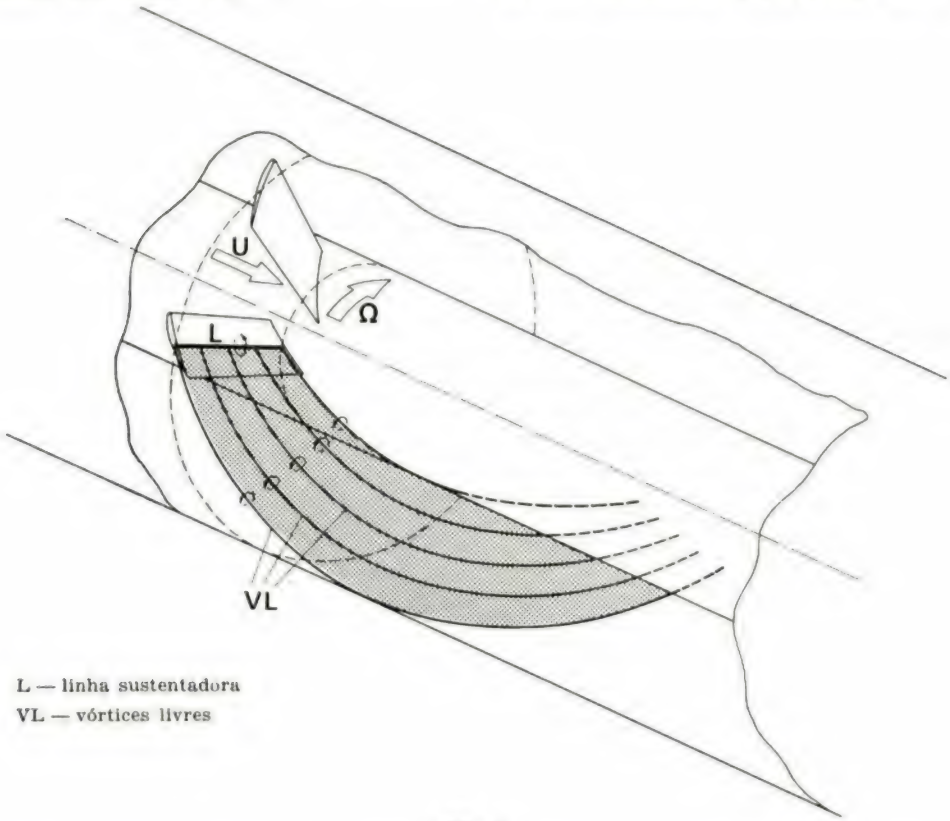


Fig. 2

Neste trabalho, vamos considerar um modelo físico mais simples e supor que as pás estão dispostas segundo uma cascata rectilínea (Fig. 3), admitindo

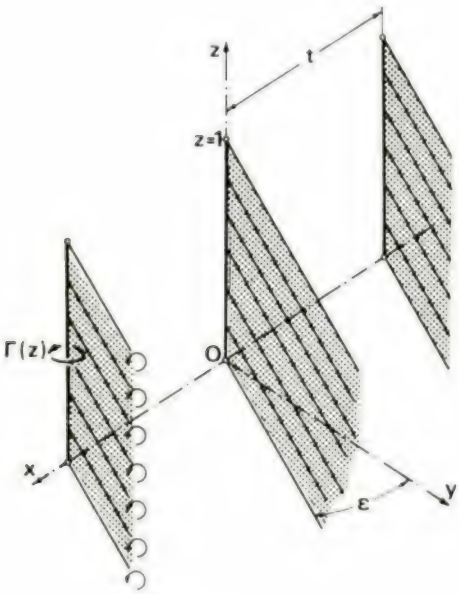


Fig. 3

tentadoras que representam estas são vórtices rectilíneos perpendiculares às duas paredes planas que limitam o escoamento. A montante, a uma distância suficiente das pás, o escoamento não perturbado é uniforme, com velocidade **U**, e faz um ângulo $\pi/2-\epsilon$ com o plano que contém as linhas sustentadoras. Deste modo, introduzindo a hipótese de pequena perturbação, os vórtices livres são semi-rectas e formam, para cada pá, uma folha de vórtice plana. Utilizamos um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z (com vectores unitários **i**, **j**, **k**) e tomamos para unidade de comprimento a distância entre as paredes.

Vamos designar por **U*** a velocidade do escoamento e escrevemos

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U} + \mathbf{V}, \qquad (1)$$

em que **U** é a velocidade do escoamento não perturbado e **V** a perturbação devida à presença das pás. Admitindo escoamento sem viscosidade, o termo de perturbação pode ser escrito com a forma [5, 6]

$$\mathbf{V} = \text{grad}\,\phi - (\mathbf{i} - \mathbf{j}\tan\epsilon)\,H(y)\,\Gamma'(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u-nt). \qquad (2)$$

Nesta equação, ϕ é uma função potencial, H(y) a função de Heaviside, $\delta(y)$ a função de Dirac, t o

passo da cascata e $\Gamma(z)$ a intensidade da linha sustentadora (circulação em torno da pá) que se supõe em geral variável ao longo da pá.

No segundo membro de (2), o termo de sumatório representa claramente a presença das singularidades. Para tornar mais óbvio o seu significado, aplicamos o operador rotacional. Tendo em conta que rot grad $\phi = 0$, resulta

$$\text{rot}\,\mathbf{V} = \mathbf{k}\,\delta(y)\,\Gamma(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u-nt) -$$

$$-(\mathbf{i}\tan\epsilon + \mathbf{j})\,H(y)\,\Gamma'(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u-nt).$$

Desta expressão facilmente se conclui que, no segundo membro, o primeiro termo (proporcional a $\Gamma(z)$) representa os vórtices ligados, e o segundo termo (proporcional a $\Gamma'(z)$) representa os vórtices livres. Excepto nestas singularidades, o escoamento é irrotacional.

Para escoamento incompreensível, da aplicação da equação da continuidade div $\mathbf{V} = 0$ resulta a seguinte equação de Poisson para ϕ

$$\text{lap}\,\phi = \sec^2\epsilon\,H(y)\,\Gamma(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(u-nt) -$$

$$-\tan\epsilon\,\delta(y)\,\Gamma(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u-nt). \qquad (3)$$

Entrando com as condições de fronteira $\partial\phi/\partial z = 0$ para $z=0$, $z=1$, e $\mathbf{V} = \text{grand}\,\phi = 0$ para $y = -\infty$, a integração analítica de (3) conduz a uma solução que se pode escrever com a seguinte forma (vejam-se em [5, 6] a derivação e expressões completas da solução)

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \Gamma(z)\ \mathbf{V}^{2d}(x, y) + \mathbf{V}^{3d}(x, y, z). \qquad (4)$$

Nesta equação, $\mathbf{V}^{2d}(x, y)$ é o campo de velocidades (apenas com componentes segundo as direcções Ox e Oy) do escoamento bi-dimensional que se obtém tomando simplesmente $\Gamma = \text{constante} = 1$. Conclui-se imediatamente que $\Gamma(z)\,\mathbf{V}^{2d}(x, y)$ representa a solução simplificada do problema (blade element theory) obtida analisando o escoamento separadamente em cada plano $z = \text{constante}$ e ignorando os efeitos tri-dimensionais (não nulos quando $\Gamma \neq \text{constante}$) devidos às interferências entre os diferentes planos e à presença de vórtices livres. Estes efeitos tri-dimensionais estão representados pelo termo adicional $\mathbf{V}^{3d}(x, y, z)$, cujas três componentes são em geral não nulas.

O método clássico de utilização destes resultados, de modo a relacionar a geometria da cascata com o escoamento, consiste em substituir, para cada plano $z = \text{constante}$, o campo vectorial $\Gamma(z)\mathbf{V}^{2d}(x, y)$ — que descreve o escoamento bi-dimensional em torno de pás de perfil pontual e circulação Γ — pelo campo de velocidades (que designamos por $\mathbf{W}^{2d}(x, y; z)$) do escoamento bi-dimensional em torno duma cascata de pás cujo perfil e posição relativa são definidos pela intersecção da cascata real com o plano $z = \text{constante}$.

Ao substituir o escoamento real pela sobreposição dos três campos de velocidades $\mathbf{U}^*(x, y, z) = \mathbf{U} + \mathbf{W}^{2d}(x, y; z) + \mathbf{V}^{3d}(x, y, z)$, há que ter em conta, quando se procura estabelecer o campo de velocidades $\mathbf{W}^{2d}(x, y; z)$ (por via analítica, numérica ou experimental), que este se sobrepõe a um escoamento não uniforme $\mathbf{U} + \mathbf{V}^{3d}(x, y, z)$, e não a um escoamento uniforme como é habitual no estudo das cascatas bi-dimensionais. Para contornar esta dificuldade, recorremos ao método utilizado por Prandtl na teoria da asa de envergadura finita, que consiste em substituir, para determinação de $\mathbf{W}^{2d}(x, y; z)$ em cada plano $z = \text{constante}$, o campo vectorial $\mathbf{U} + \mathbf{V}^{3d}(x, y, z)$, na vizinhança de cada pá, por um escoamento uniforme fictício definido por $\mathbf{U} + \mathbf{v}^{3d}(z)$, em que $\mathbf{v}^{3d}(z) = \mathbf{V}^{3d}(0, 0, z)$. Ainda na hipótese de pequena perturbação, é lícito substituir $\mathbf{v}^{3d}(z)$ apenas pela sua componente $\mathbf{v}_1^{3d}(z)$ perpendicular a $\mathbf{U}$ e à linha sustentadora (Fig. 4).

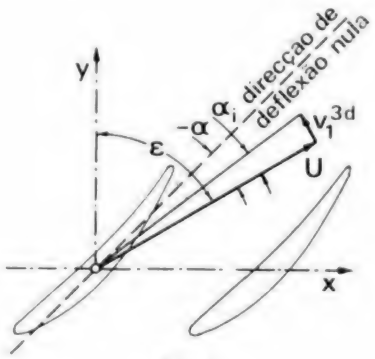


Fig. 4

Note-se que uma das principais dificuldades do problema reside no facto de que os campos vectoriais $\mathbf{V}^{3d}(x, y, z)$ (ou $\mathbf{v}_1^{3d}(z)$ e $\mathbf{W}^{2d}(x, y, z)$ são interdependentes. De facto, enquanto $\mathbf{V}^{3d}(x, y, z)$ depende de $\Gamma(z)$, o campo de velocidades $\mathbf{W}^{2d}(x, y; z)$ (e portanto $\Gamma(z)$) depende da direcção do vector $\mathbf{U} + \mathbf{v}_1^{3d}(z)$. Por outras palavras, os termos bi-dimensional e tri-dimensional não podem ser calculados separadamente. O modo de resolução analítica e numérica deste problema está descrito em [5, 6]. No capítulo 5, apresentamos resultados numéricos, sob a forma de curvas, para cascatas com diversas configurações, juntamente com resultados obtidos por outros métodos, para comparação.

4 — TEORIA DA SUPERFÍCIE SUSTENTADORA

Existem fundamentalmente dois factores limitativos da validade da teoria da linha sustentadora, tal

como foi apresentada acima. O primeiro refere-se à simplificação feita ao substituir o campo de velocidades $\mathbf{U} + \mathbf{V}^{3d}(x, y, z)$ por $\mathbf{U} + \mathbf{v}_1^{3d}(z)$. Recorde-se que esta substituição tem em vista a utilização dos valores de $\mathbf{W}^{2d}(x, y; z)$ obtidos pelos métodos clássicos das cascatas bi-dimensionais. O segundo factor está intrinsecamente ligado ao modelo físico adoptado, que supõe, para cada pá, os vórtices livres do rasto como tendo a sua origem num único vórtice ligado (linha sustentadora), e não em todos os pontos da superfície da pá ou em todos os vórtices ligados que, no modelo menos simplificado da superfície sustentadora, representam a pá.

Embora o método da linha sustentadora seja frequentemente utilizado no estudo tri-dimensional do escoamento em turbomáquinas axiais, a ordem de grandeza dos erros acima apontados, inerentes ao método, não é bem conhecida. Para esclarecer tal problema, iremos recorrer a um modelo físico mais perfeito e complexo, que consiste em representar cada pá por uma superfície de vórtice a ela ligada (superfície sustentadora) e não por único vórtice.

Neste trabalho, iremos supor que se trata de pás suficientemente delgadas para que se possa considerar a sua espessura como aproximadamente nula. Aliás, admitindo pequena perturbação, é aceitável analisar separadamente e sobrepor os efeitos devidos à espessura das pás e os que estão relacionados com a força de sustentação (ângulo de ataque, curvatura). Este procedimento é clássico na teoria dos perfis aerodinâmicos.

O método da superfície sustentadora consiste em substituir a pá por uma superfície — superfície de esqueleto — em geral curva, definida pelo lugar geométrico das linhas de esqueleto dos perfis das suas secções rectas, e na qual estão situadas as linhas de vórtice representativas da pá. Continuando a admitir pequena perturbação, substituimos aquela superfície por um plano — plano de base — tanto quanto possível próximo dela, e no qual existem os vórtices ligados à pá e também os vórtices livres do rasto (Fig. 5). A relação entre o campo de velocidades, induzido pelos vórtices, e a geometria da cascata traduz-se pela condição de que a componente da velocidade normal à superfície de esqueleto é nula. Iremos admitir que a superfície de esqueleto e o plano de base são suficientemente próximos para que se possam substituir os ângulos do escoamento calculados num ponto daquela superfície pelos correspondentes valores calculados na projecção do ponto sobre o plano de base.

Na análise do problema, consideramos apenas pás de corda constante e usamos um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z, com o eixo Oz coincidente com o bordo de ataque duma pá (ou com a sua projecção sobre o respectivo plano de base). Os planos de base das pás ficam assim definidos por $x - y \tan \epsilon = nt$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Para estudar o escoamento em torno da pá de referência $n = 0$, é conveniente introduzir duas outras coordenadas $\xi = x \sin \epsilon + y \cos \epsilon$ e $\eta = -x \cos \epsilon + y \sin \epsilon$,

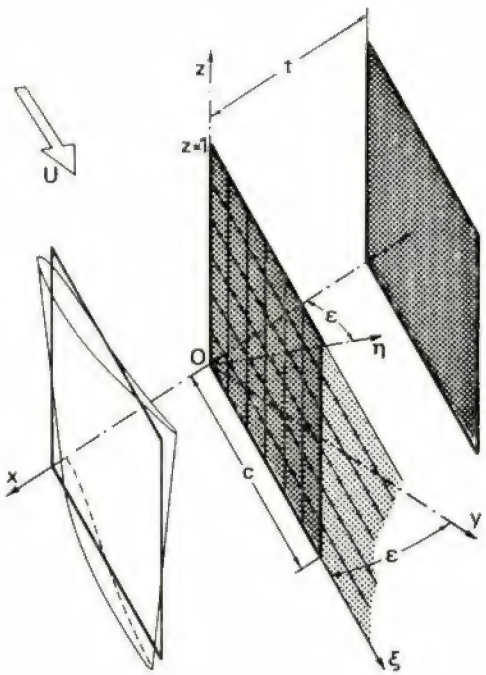


Fig. 5

que, juntamente com z, formam outro sistema de coordenadas cartesianas. Para a pá $n = 0$, os bordos de ataque e de fuga (ou as suas projecções sobre o plano de base) ficam definidos por $\xi = 0$ e $\xi = c$, $n = 0$, sendo c a corda da pá.

Seja então $\mathbf{q}(\xi, z; \xi')$ a velocidade, induzida num ponto $P(\xi, \eta = 0, z)$ do plano de base $n = 0$, por uma cascata de linhas sustentadoras de intensidade $\Gamma(z, \xi')$ cuja localização é definida pelas coordenadas $\xi = \xi'$ e $\eta = nt \cos \epsilon$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Utilizando resultados referidos no capítulo 3, teremos

$$\mathbf{q}(\xi, z; \xi') = \mathbf{V}[(\xi - \xi') \cos \epsilon, (\xi - \xi') \sin \xi, z],$$

em que $\mathbf{V}(x, y, z)$ é dado por (4).

Passando agora ao modelo físico que nos interessa, consideremos uma cascata de superfícies sustentadoras, ou seja, uma distribuição contínua de linhas sustentadoras em cada plano de base, com intensidade $\Gamma(z, \xi')$ por unidade de comprimento ao longo da corda. A velocidade total $\mathbf{Q}(\xi, z)$ induzida por todos os vórtices (ligados e livres) no ponto $P(\xi, \eta = 0, z)$ é então obtida por integração

$$\mathbf{Q}(\xi, z) = \int_0^c \mathbf{q}(\xi, z; \xi')\, d\xi'. \qquad (5)$$

Seja $\eta = f(\xi, z)$ a equação da superfície de esqueleto da pá de referência $n = 0$. Admitindo pequena perturbação $(Q \ll U)$, a condição de tangência do escoamento à superfície de esqueleto pode escrever-se

$$\alpha + \frac{Q_\eta}{U} = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \qquad (6)$$

em que Q_η é a componente de **Q** na direcção perpendicular ao plano de base, e α é o ângulo (que se supõe pequeno) entre a direcção do escoamento não perturbado (vector **U**) e o plano de base. A resolução analítica e numérica deste problema foi tratada em [5, 6].

5 — RESULTADOS NUMÉRICOS

Nas Figs. 6, 7 e 8 apresentam-se resultados numéricos obtidos com base no modelo da linha sustentadora (abreviadamente designado por LS) e no modelo da superfície sustentadora (SS). Para completar a comparação, as Figs. 6 e 7 mostram também resultados da teoria bi-dimensional (2D) (blade element theory) e de mais dois modelos que utilizam simplificações frequentemente adoptadas no estudo de turbomáquinas.

O primeiro destes dois modelos, que designamos por plano deflector (PLN), resulta duma simplificação do modelo da linha sustentadora em que se admite que o passo t é suficientemente pequeno (em rigor infinitesimal) para que o termo tri-dimensional de velocidade (designado no capítulo 3 por $\mathbf{V}^{3d}$) se possa considerar como invariável com a coordenada x. Esta hipótese simplificativa corresponde, na geometria cilíndrica, ao conhecido modelo axi-simétrico do disco deflector (actuator disc) (veja-se por exemplo [7]).

O segundo modelo, que denominamos placa deflectora (PLC), pode-se considerar como resultando do modelo da superfície sustentadora por uma simplificação semelhante à que acima referimos para PLN. Ao contrário de PLN, PLC tem em conta que a deflexão se processa ao longo duma distância finita, entre o plano que contém os bordos de ataque e o plano que contém os bordos de fuga das pás (ou seja entre $0<y<t \cos \varepsilon$). Este modelo, quando transposto para geometria cilíndrica, é análogo ao que se

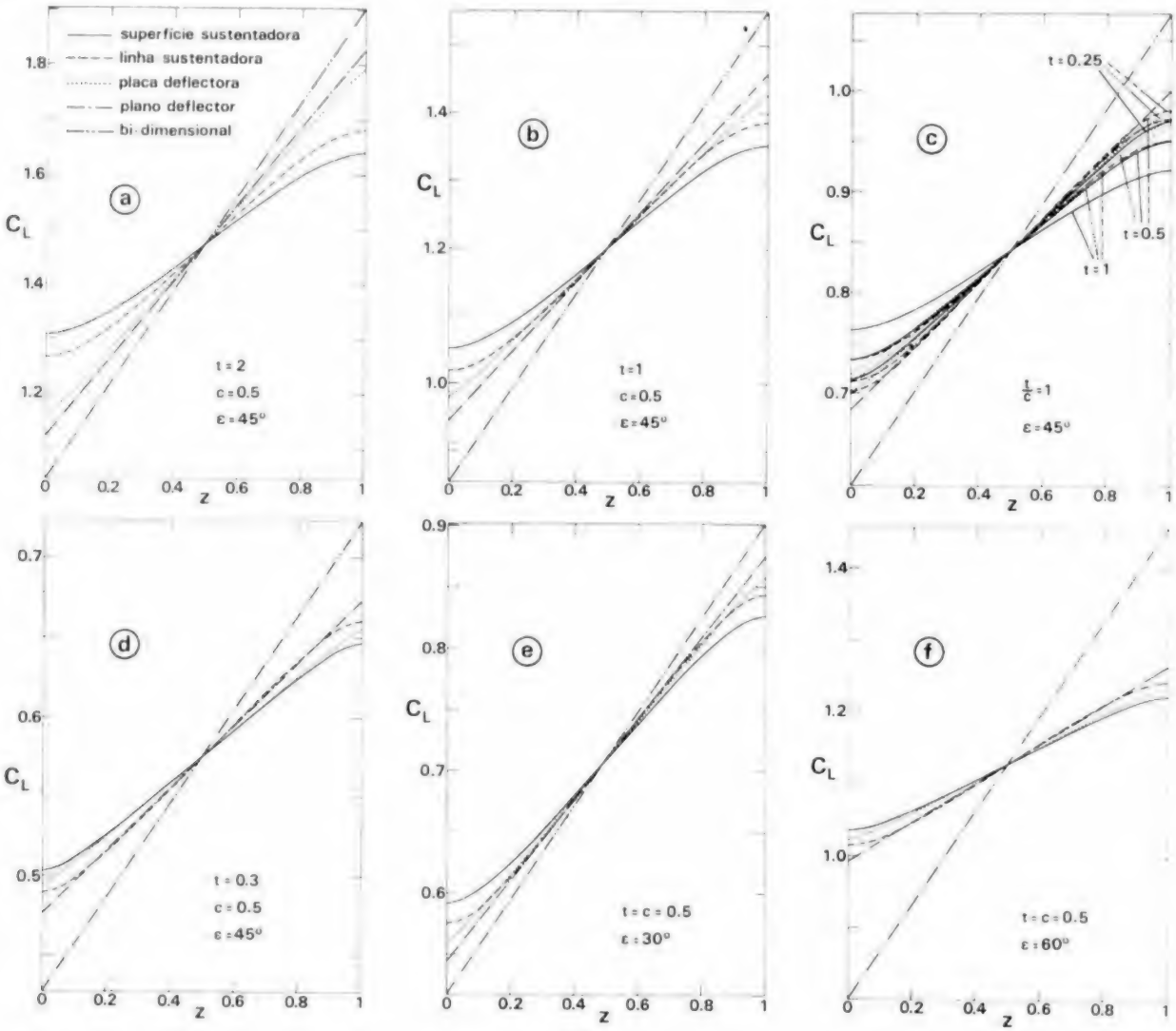


Fig. 6

designa na literatura de língua inglesa por «through flow analysis» (veja-se por exemplo [7]).

Os resultados numéricos apresentados foram calculados para pás de compressor, de corda constante e perfil parabólico (flecha relativa 0,05). A fim de evidenciar os efeitos tri-dimensionais, foram escolhidas pás torsas, com ângulo de torsão variando linearmente ao longo do comprimento da pá e valor total (de extremidade a extremidade) igual a 10°. Para direcção do escoamento não perturbado foi tomada a tangente à linha de esqueleto da pá junto ao bordo de ataque da secção $z=1/2$ (equidistante das extremidades). As Figs. 6 e 7 mostram resultados obtidos com diversos valores de t (passo), c (corda) e ε (ângulo de disposição das pás). Recorde-se que o comprimento das pás é unitário.

A Fig. 6 representa a variação do coeficiente de sustentação $C_L(z) = 2T_{tot}(z/Uc$ (T_{tot} = circulação total em torno da pá) e a Fig. 7 mostra a variação do coeficiente adimensional $C_p = 2Q_\xi(\xi, z)/U$ ($\vec{Q}(\xi, z)$ = perturbação de velocidade à superfície da pá). Note-se que C_p é de facto um coeficiente de pressão linearizado. Finalmente, na Fig. 8, apresenta-se a distribuição da componente $Q_z(\xi, z)$ na superfície da pá, dada por SS. Na Fig. 6, as escalas foram escolhidas de modo a que as rectas representativas dos resultados dados pela teoria bi-dimensional tenham inclinações iguais. Deste modo torna-se mais evidente a influência da geometria da cascata sobre o comportamento tri-dimensional do escoamento.

A Fig. 6 mostra que, com c e ϵ constantes, os efeitos tri-dimensionais (em valor relativo), dados por SS, não são apreciavelmente afectados pela variação de t. Tornam-se porém mais importantes com o aumento de c, para ϵ e t/c constantes (Fig. 6 c), e com o aumento de ϵ, para t e c constantes. Em todos os casos, verifica-se que os efeitos tri-dimensionais (ou seja o desvio em relação aos resultados dados por 2D) previstos por SS (o mais realista dos modelos considerados) são maiores do que os previstos por LS, PLC e PLN. Destes três modelos, PLN é o que dá pior aproximação, como seria de esperar (veja-se também Fig. 7). Mantendo t/c e ϵ constantes, a Fig. 6 c mostra que a variação de c não afecta os resultados de 2D e PLN, e ainda que LS se aproxima de SS à medida que c diminui (como sucede na asa de avião.

Tem interesse analisar os resultados de LS juntamente com os de PLC, a fim de comparar os erros introduzidos na avaliação dos efeitos tri-dimensionais quando a simplificação (a partir de SS) consiste em tomar a corda como nula (caso de LS) ou o escoamento como invariável com a coordenada x (caso de PLC). A Fig. 6 mostra que LS melhora, em rela-

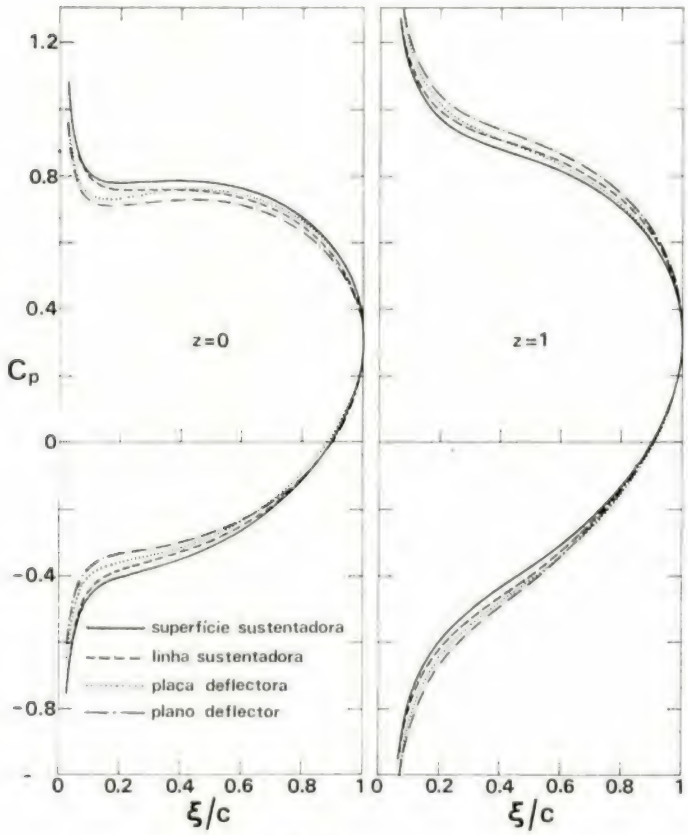


Fig. 7

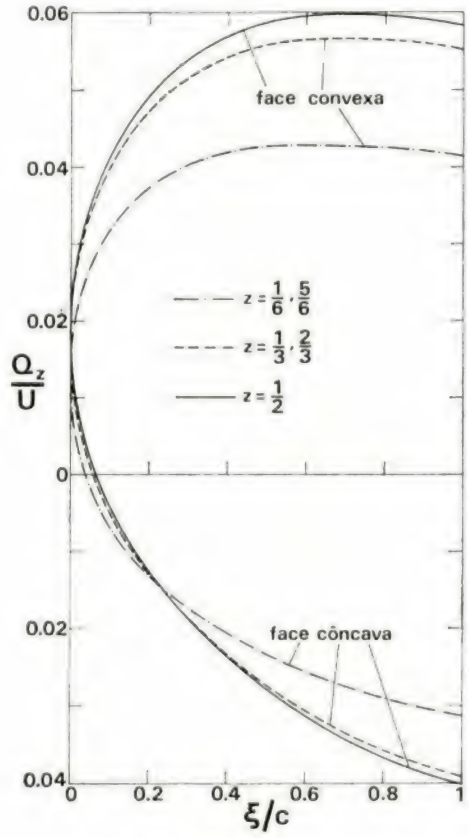


Fig. 8

ção a PLC, à medida que t aumenta e c e ϵ diminuem. Verifica-se também que, na vizinhança das paredes $z=0$ e $z=1$, as curvas dadas por LS têm uma inclinação mais correcta (tomando SS como padrão) do que as obtidas com PLC. Por exemplo, no caso em que $t=c=0,5$, $\epsilon=45°$ (Fig. 6 c), LS dá melhor aproximação do que PLC perto das paredes, sucedendo o inverso na zona central da pá.

6 — CONCLUSÕES

Verificou-se que a teoria bi-dimensional (blade element theory) é inadequada para descrever escoamentos em que a geometria das pás é claramente tri-dimensional. Para estudar os efeitos tri-dimensionais, foram utilizados quatro modelos, sendo o da superfície sustentadora o mais perfeito. A precisão dos resultados dos outros três modelos varia consideravelmente com a geometria do sistema, sendo o plano deflector, de todos, o que dá resultados menos satisfatórios.

Note-se que, embora os resultados apresentados se refiram a escoamento incompressível, é possível estendê-los a escoamento subsónico utilizando a conhecida transformação de Göthert [8].

Este trabalho foi realizado no âmbito do Projecto de Investigação TLE-3 do Núcleo de Estudos de Engenharia Mecânica do Instituto de Alta Cultura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 — N. Scholz, «Aerodynamik der Schaufelgitter», vol. 1, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1965.

2 — J. P. Gostelow, «Compressible flow theories for airfoil cascades», Journal of Engineering for Power, vol. 95A, p. 281-292 (1973).

3 — H. Schlichting, «Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter», VDI-Forschungsheft 447 (1955).

4 — E. Martensen, «Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmschen Integralgleichung», Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 3, p. 235-270 (1959).

5 — A. F. de O Falcão, «Linearized three-dimensional potential flow through a rectilinear cascade of blades», Proceedings of the Second International Symposium on Air Breathing Engines, The Royal Aeronautical Society, London, 1974.

6 — A. F. de O. Falcão, «Three-dimensional potential flow through a rectilinear cascade of blades», Ingenieur-Archiv, vol. 44, p. 27-41 (1975).

7 — J. H. Horlock, «Axial Flow Turbines, Fluid Mechanics and Thermodynamics», Butterworths, London, 1966.

8 — A. H. Shapiro, «The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow», vol. 1, Ronald Press, New York, 1953.

NÚMERO 437 DEZEMBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII

C. D. U. 621-154

Escoamento potencial bidimensional numa cascata de perfis rectos — método da transformação conforme

A. J. DE ALMEIDA SARMENTO
J. A. FALCÃO DE CAMPOS

RESUMO

Apresenta-se a análise do escoamento potencial bidimensional numa cascata inclinada de perfis rectos a partir da transformação conforme do escoamento em torno do círculo. Obtêm-se as expressões da velocidade, ângulo de ataque e forças que actuam sobre os perfis. Apresentam-se e discutem-se os resultados numéricos obtidos para a distribuição de pressão na região da cascata, ângulo de deflexão, coeficiente de sustentação e coeficiente de interferência.

SUMMARY

The theoretical analysis of the two-dimensional potential flow about a staggered cascade of straight blades is presented based on the conformal transformation of the flow about a circle. Expressions are derived for the velocity, angle of attack and forces acting on the aerofoils. Numerical results for the pressure distribution about the cascade, deflection angle, lift coefficient and interference coefficient are also presented and discussed.

1 — INTRODUÇÃO

O escoamento potencial bidimensional em cascatas de pás assume particular interesse, numa introdução ao vasto campo dos escoamentos em turbomáquinas axiais, pois é susceptível de poder ser estudado teoricamente através da utilização de diversos métodos analíticos.

A situação do problema bidimensional no caso geral do estudo tridimensional do escoamento em turbomáquinas axiais e as hipóteses simplificativas que a ele conduzem, sendo devidamente analisados em [1], transcendem no entanto o âmbito deste trabalho.

Os métodos analíticos que se utilizam no estudo bidimensional do escoamento em cascatas de pás podem ser divididos em dois grupos principais:

a) Método das singularidades, que consiste em substituir cada pá por uma distribuição de fontes, poços ou vórtices, o que conduz, em geral, a uma equação integral cuja resolução implica a utilização de métodos numéricos.

b) Métodos que envolvem tranformações conformes e que permitem passar do escoamento situado num plano $\zeta(\xi,\eta)$ para o escoamento numa cascata de perfis situada num outro plano $z(x,y)$, utilizando ou não planos intermédios. De notar que este tipo de métodos, porque resolve analiticamente de uma forma completa o problema, fornece a possibilidade de testar a precisão dos métodos numéricos empregues na resolução pelo método das singularidades.

Um dos métodos compreendidos neste segundo grupo consiste em transformar o escoamento em torno do círculo no escoamento numa cascata inclinada de perfis rectos sem espessura e foi pela primeira formulado por Weinig [2], encontrando-se tratado com relativo detalhe em [1] a [5].

Da formulação que a seguir se apresenta é possível extrair alguns resultados numéricos com interesse, em particular a distribuição de pressão na região da cascata e sobre cada pá, para vários valores da razão passo-corda, inclinação da cascata e ângulo de ataque. De salientar ainda que este método constitui a base para a determinação de coeficientes de interferência para perfis em cascata, que encontram larga utilização no projecto de ventiladores e compressores axiais (veja-se por exemplo [6]).

2 — FORMULAÇÃO ANALÍTICA

Consideremos a transformação de Joukowski:

$$z = f(\zeta) = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad . \qquad (1)$$

O potencial complexo z representa o escoamento sem circulação em torno do círculo de raio a, e resulta

da sobreposição de um escoamento uniforme $z_1 = \zeta$ com um escoamento produzido por um dipolo situado no centro do círculo.

Se considerarmos que o escoamento uniforme é equivalente ao escoamento produzido por um dipolo situado no infinito podemos, por separação e localização adequada da fonte e do poço que o constituem, determinar um escoamento em torno do círculo de raio a, susceptível de se transformar no escoamento numa cascata de perfis rectos sem espessura.

Desloquemos assim, a fonte e o poço de que se compõe o dipolo no infinito para os pontos $\zeta = -a/k$ e $\zeta = a/k$ respectivamente, sendo k um número real positivo inferior a 1. A fim de manter o círculo como linha de corrente do escoamento torna-se necessário separar o dipolo situado no centro do círculo deslocando a fonte para o ponto $\zeta = -ak$ e o poço para o ponto $\zeta = ak$. Obtém-se assim para o potencial

$$z = f(\zeta) = \frac{g}{2\pi}\left[\ln\frac{\zeta + a/k}{\zeta - a/k} + \ln\frac{\zeta + ak}{\zeta - ak}\right] \quad (2)$$

sendo g o caudal associado a cada uma das singularidades.

Interpretando z como a função que define uma transformação conforme do plano ζ no plano z, é evidente que o círculo se transforma numa série infinita de segmentos de recta paralelos ao eixo real e distanciados de g correspondendo aos infinitos valores da função logarítmica afastados entre si de $2\pi i$. Sendo g um número real é evidente que a cascata assim obtida não possui inclinação.

Para obter o caso geral de uma cascata inclinada é necessário introduzir no plano do círculo dois vórtices do mesmo sentido nos pontos $-a/k$ e ak e dois vórtices de sentido contrário nos pontos $-ak$ e a/k. Virá para o potencial complexo:

$$z = \frac{1}{2\pi}\left[(g - ih)\ln\frac{\zeta + a/k}{\zeta - a/k} + (g + ih)\ln\frac{\zeta + ak}{\zeta - ak}\right] \quad (3)$$

sendo h a intensidade de cada vórtice. Verifica-se que o transformado do círculo é um conjunto infinito de segmentos de recta (perfis) desfazados de g segundo o eixo imaginário e de h segundo o eixo real (fig. 1).

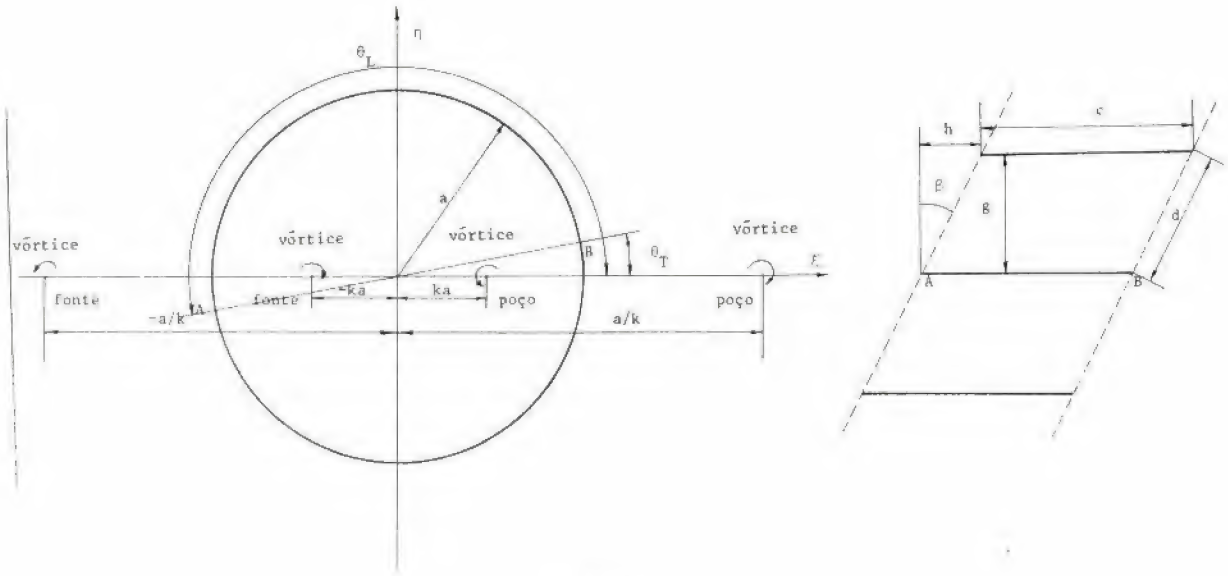


Fig. 1

Introduzindo a distância d (passo) entre bordos de ataque e o ângulo de inclinação β, temos $h = d.\sin\beta$ e $g = d.\cos\beta$ donde, desprezando a constante aditiva $d/2.e^{i(\pi/2-\beta)}$, podemos escrever

$$z = \frac{d}{2\pi}\left[e^{-i\beta}\ln\frac{a + k\zeta}{a - k\zeta} + e^{i\beta}\ln\frac{\zeta + ak}{\zeta - ak}\right]. \quad (4)$$

O parâmetro k está relacionado com a razão passo-corda d/c. Com efeito, a localização dos bordos de ataque e de fuga de um perfil obtém-se da condição $dz/d\zeta = 0$, ou seja

$$e^{-i\beta}\left[\frac{k}{a + k\zeta} + \frac{k}{a - k\zeta}\right] + e^{i\beta}\left[\frac{1}{\zeta + ak} - \frac{1}{\zeta - ak}\right] = 0 \quad .$$

fazendo $\zeta = a\,e^{i\theta}$ obtém-se

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1-k^2}{1+k^2}\operatorname{tg}\beta \quad . \tag{5}$$

Designando por θ_L e θ_T as raízes desta equação tem-se $\theta_L = \theta_T + \pi$ e fazendo $\zeta_L = a\ e^{i\theta_L}$ e $\zeta_T = a\ e^{i\theta_T}$ podemos obter a distância $c = x_L - x_T$ entre os bordos de ataque e de fuga (pontos correspondentes a ζ_L e ζ_T), ou seja a corda. Virá, depois de um cálculo relativamente extenso

$$\frac{c}{d} = \frac{2}{\pi}\left[\cos\beta \ln \frac{\sqrt{k^4 + 2k^2\cos 2\beta + 1} + 2k\cos\beta}{1-k^2} + \right.$$

$$\left. + \sin\beta \operatorname{tg}^{-1} \frac{2k\sin\beta}{\sqrt{k^4 + 2k^2\cos 2\beta + 1}}\right] . \tag{6}$$

O escoamento no plano z (plano da cascata), para que origine forças sobre os perfis, deverá ter ângulo de ataque não nulo e circulação diferente de zero ao longo de qualquer contorno que englobe no seu interior um perfil.

O problema consiste, pois, em determinar no plano ζ um escoamento com circulação em torno do círculo que se transforme por (4) no escoamento atrás referido.

É óbvio que o escoamento em questão deverá ser um escoamento potencial conservando o círculo como linha de corrente e possuindo singularidades apenas nos pontos $\zeta = \pm a/k$ e $\zeta = \pm ak$. O escoamento definido por

$$F = Vz = \frac{Vd}{2\pi}\left[e^{-i\beta} \ln \frac{a + k\zeta}{a - k\zeta} + e^{i\beta} \ln \frac{\zeta + ak}{\zeta - ak}\right] \tag{7}$$

satisfaz estas últimas condições mas dá origem no plano z a um escoamento uniforme de velocidade V com ângulo de ataque nulo.

Consideremos então o escoamento definido por

$$F = \frac{Vd}{2\pi}\left[e^{-i(\beta+\alpha)} \ln \frac{a + k\zeta}{a - k\zeta} + \right.$$

$$\left. + e^{i(\beta+\alpha)} \ln \frac{\zeta + ak}{\zeta - ak}\right] \quad . \tag{8}$$

No plano z somos conduzidos a um escoamento sem circulação com ângulo de ataque α. Note-se que este escoamento não é deflectido pela cascata. Com efeito a velocidade no infinito a montante é

$$V(-\infty) = \overline{\left[\frac{dF}{dz}\right]}_{(-\infty)}$$

e, atendendo a que o ponto correspondente a $-\infty$ no plano ζ é $\zeta = -a/k$ temos

$$V(-\infty) = \overline{\left[\frac{dF}{dz}\right]}_{-\infty} = \overline{\left[\frac{dF}{d\zeta}\right]}_{\zeta = -ak} \cdot$$

$$\overline{\left[\frac{d\zeta}{dz}\right]}_{\zeta = -a/k} = Ve^{i\alpha} \quad .$$

Analogamente obtém-se para a velocidade no infinito a juzante

$$V(+\infty) = \overline{\left[\frac{dF}{d\zeta}\right]}_{\zeta = ak} \cdot \overline{\left[\frac{d\zeta}{dz}\right]}_{\zeta = a/k} = Ve^{i\alpha}$$

ou seja, $V(-\infty) = V(+\infty)$.

Importa pois sobrepor ao escoamento (8) um escoamento com circulação. Logicamente este pode ser obtido colocando dois vórtices do mesmo sentido em $\zeta = \pm a/k$ e os correspondentes vórtices de sentido contrário em $\zeta = \pm ak$. Virá para o potencial complexo deste escoamento

$$F_1 = \frac{iK}{2\pi} \ln \frac{\zeta^2 - a^2k^2}{\zeta^2 - a^2/k^2} \quad , \tag{9}$$

sendo K a intensidade de cada vórtice. Evidentemente a circulação em torno do círculo será $\Gamma = 2K$. Sobrepondo os dois escoamentos o potencial será $F + F_1$ e a circulação determina-se fazendo intervir a condição de Joukowski nos bordos de fuga dos perfis:

$$\left[\frac{d(F + F_1)}{d\zeta}\right]_{\zeta = \zeta_T} = 0 \tag{10}$$

o que conduz a

$$K = \frac{2k\sin\alpha}{\sqrt{k^4 + 2k^2\cos 2\beta + 1}} Vd \quad . \tag{11}$$

Se determinarmos para o escoamento final as velocidades no infinito antes e depois da cascata achamos

$$V(-\infty) = Ve^{i\alpha} + \frac{2k\sin\alpha V}{\sqrt{k^4 + 2k^2\cos 2\beta + 1}}\ e^{i(\pi/2 - \beta)} \quad ,$$

$$V(+\infty) = Ve^{i\alpha} + \frac{2k\sin\alpha V}{\sqrt{k^4 + 2k^2\cos 2\beta + 1}}\ e^{-i(\pi/2 + \beta)} \quad . \tag{12}$$

Decompondo segundo as direcções paralela e normal à frente da cascata virá

$$V_t(-\infty) = V\sin(\alpha + \beta) + \frac{2k\sin\alpha V}{\sqrt{k^4 + 2k^2\cos 2\beta + 1}} \quad ,$$

$$V_t(+\infty) = V\sin(\alpha + \beta) - \frac{2k\sin\alpha V}{\sqrt{k^4 + 2k^2\cos 2\beta + 1}} \quad ,$$

$$V_n(-\infty) = V_n(+\infty) = V\cos(\alpha + \beta) \quad . \tag{13}$$

O mesmo resultado poder-se-á obter aplicando a equação da continuidade a ambos os lados da cascata e calculando a circulação da velocidade para um contorno constituído por duas rectas paralelas aos perfis distanciadas de g e fechado por dois segmentos de recta paralelos à frente da cascata situados no infinito a montante e a juzante.

O ângulo de ataque α' (ângulo da velocidade em $z = -\infty$), tendo sido alterado, passa a assumir o valor

$$\alpha' = \mathrm{tg}^{-1} \frac{\sin\alpha + \frac{2k}{R}\cos\beta\sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{2k}{R}\sin\beta\sin\alpha} \quad , \qquad (14)$$

e o ângulo do escoamento deflectido tem o valor:

$$\alpha'' = \mathrm{tg}^{-1} \frac{\sin\alpha - \frac{2k}{R}\cos\beta\sin\alpha}{\cos\alpha - \frac{2k}{R}\sin\beta\sin\alpha} \quad , \qquad (15)$$

com $R = \sqrt{k^4 + 2k^2\cos 2\beta + 1}$

Finalmente a aplicação do teorema da quantidade de movimento conduz às componentes X e Y da força exercida sobre um perfil:

$$X = -4\rho V^2 d \frac{k}{R}\sin^2\alpha \quad ,$$
$$Y = 4\rho V^2 d \frac{k}{R}\sin\alpha\cos\alpha \quad . \qquad (16)$$

Apresentam-se a seguir alguns casos particulares com interesse: 1.º $\beta = 0$ (cascata sem inclinação).

Neste caso a equação (5) pode ser resolvida em ordem a k obtendo-se

$$k = \tanh\left(\frac{c}{d}\frac{\pi}{4}\right) . \quad \text{Como } \frac{2k}{R} = \tanh\left(\frac{c}{d}\frac{\pi}{2}\right)$$

as componentes da sustentação tomam os valores

$$X = -2\rho V^2 d \tanh\left(\frac{c}{d}\frac{\pi}{2}\right)\sin^2\alpha \ ,$$
$$Y = 2\rho V^2 d \tanh\left(\frac{c}{d}\frac{\pi}{2}\right)\sin\alpha\cos\alpha \quad . \qquad (17)$$

Se c/d é suficientemente pequeno será $\tanh\left(\frac{c}{d}\frac{\pi}{2}\right) \simeq \left(\frac{c}{d}\frac{\pi}{2}\right)$ e obtêm-se as conhecidas expressões das componentes da sustentação para um perfil isolado:

$$X \simeq -2\pi\frac{\rho V^2}{2} c \sin^2\alpha \quad ,$$
$$Y \simeq 2\pi\frac{\rho V^2}{2} c \sin\alpha\cos\alpha \ . \qquad (18)$$

Se, pelo contrário, $c/d \gg 1$ então $\tanh\left(\frac{c}{d}\frac{\pi}{2}\right) \simeq 1$ e teremos:

$$X \simeq -4\frac{\rho V^2}{2}\sin^2\alpha \quad ,$$
$$Y \simeq 4\frac{\rho V^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha \quad . \qquad (19)$$

Ainda no caso $\beta = 0$, interessa considerar o que se passa com a deflexão introduzida pela cascata no escoamento. Os ângulos α' e α'' são dados por

$$\mathrm{tg}\alpha' = \left[1 + \tanh\left(\frac{c}{d}\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{tg}\alpha \quad ,$$

$$\mathrm{tg}\alpha'' = \left[1 - \tanh\left(\frac{c}{d}\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{tg}\alpha \quad ,$$

o que acarreta para a deflexão

$$\mathrm{tg}\alpha' - \mathrm{tg}\alpha'' = \left(1 - e^{-\frac{c\pi}{d}}\right)\mathrm{tg}\alpha' \quad . \qquad (20)$$

Se $c/d \gg 1$ então $\mathrm{tg}\alpha'' \cong 0$, isto é, a velocidade no infinito a juzante da cascata é aproximadamente paralela aos perfis, sendo o ângulo de deflexão igual ao ângulo de ataque. Podemos considerar, de acordo com (20), que, no que respeita a deflexão produzida no escoamento pela cascata, o factor $(1 - e^{-c\pi/d})$ constitui o que se pode chamar a eficiência da cascata.

2.º $\beta = 90°$ (perfis alinhados ao longo do eixo real).

De (5) obtém-se

$$k = \frac{1 - \cos\left(\frac{c}{d}\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{c}{d}\frac{\pi}{2}\right)} \quad . \qquad (21)$$

3.º $c/d \to 0$ (perfil isolado).

Neste caso tem-se $\frac{k}{R} \to k$ e $k \to \frac{c}{d}\frac{\pi}{4}$ obtendo-se para a sustentação

$$X = -2\pi\frac{\rho V^2}{2} c \sin^2\alpha \quad ,$$
$$Y = 2\pi\frac{\rho V^2}{2} c \sin\alpha\cos\alpha \ . \qquad (22)$$

No que respeita aos ângulos α' e α'' verifica-se que $\alpha', \alpha'' \to \alpha$ o que corresponde ao caso de deflexão nula, como seria de esperar.

3 — RESULTADOS NUMÉRICOS

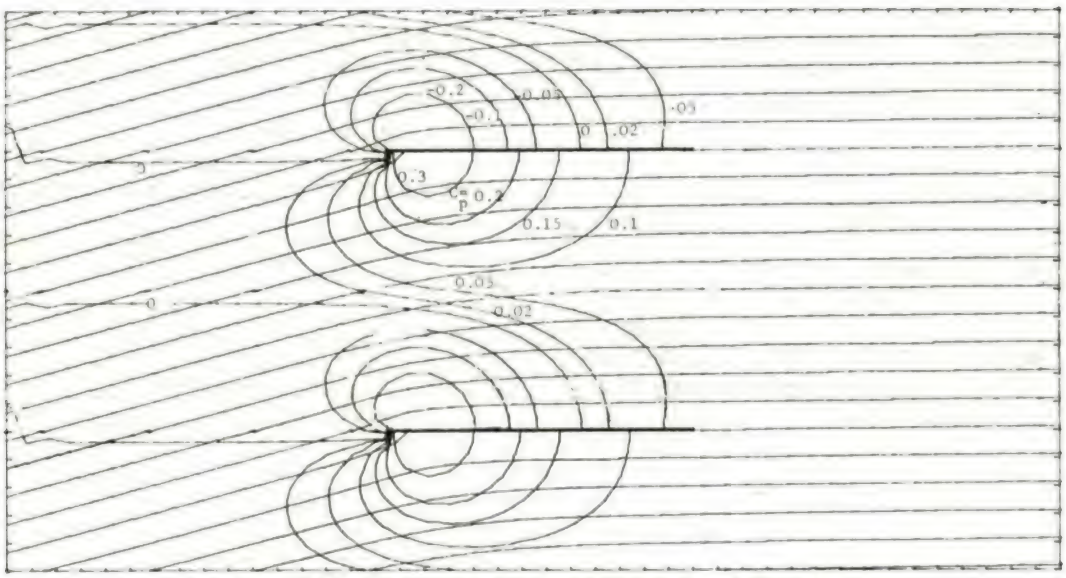


Fig. 2 — Linhas de corrente e Cp constante $\beta=0°$, $\alpha'=15°$ e $d/c=1$

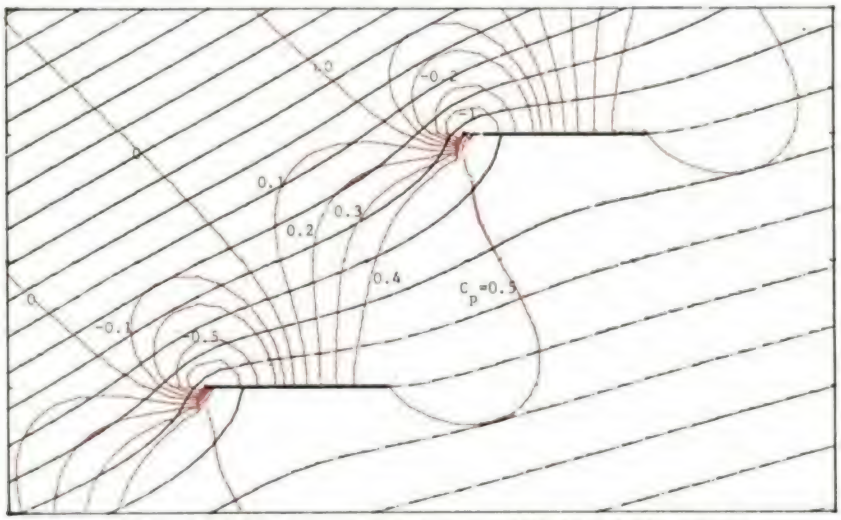


Fig. 3 — Linhas de corrente e Cp constante $\beta=45°$, $\alpha'=30°$ e $d/c=2$

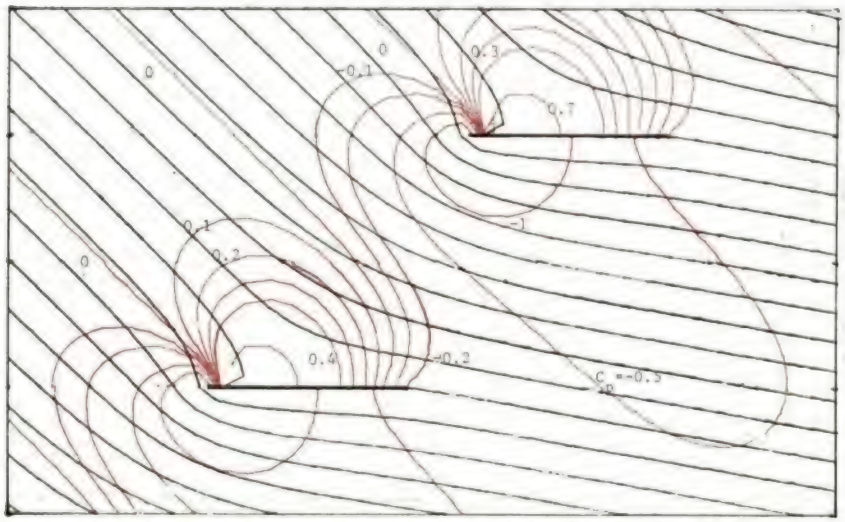


Fig. 4 — Linhas de corrente e Cp constante $\beta=45°$, $\alpha'=-45°$ e $d/c=2$

Nas fig. 2, 3, 4 apresentam-se, para várias geometrias de cascatas e para diversos ângulos de ataque α', as linhas de corrente do escoamento e a distribuição de pressão adimensionalizada $C_p = \frac{P - P_{-\infty}}{1/2 \rho V^2_{-\infty}}$ na região da cascata de perfis. De notar que o escoamento quase não é perturbado a uma distância da ordem de grandeza da corda, quer a montante quer a juzante da cascata, e que as linhas de corrente são já praticamente paralelas na zona do bordo de fuga. Como seria de esperar todas as linhas de pressão constante encontram os perfis entre o bordo de ataque e o ponto de estagnação.

No que se diz respeito à localização do ponto de estagnação as fig. 5, 6, 7 mostram que:

— Não é grandemente afectada pelo ângulo de inclinação β da cascata;

— Tem mais influência o valor do módulo do ângulo de ataque α' que o facto de ser positivo ou negativo;

— É fortemente afectado pelo valor da relação passo-corda d/c.

É também de referir que o bordo de ataque é um ponto de velocidade infinita, pelo que o valor da pressão tenderá para $-\infty$ e o bordo de fuga é um ponto de velocidade finita, em geral não nula.

Nas fig. 8, 9 apresenta-se a variação do ângulo

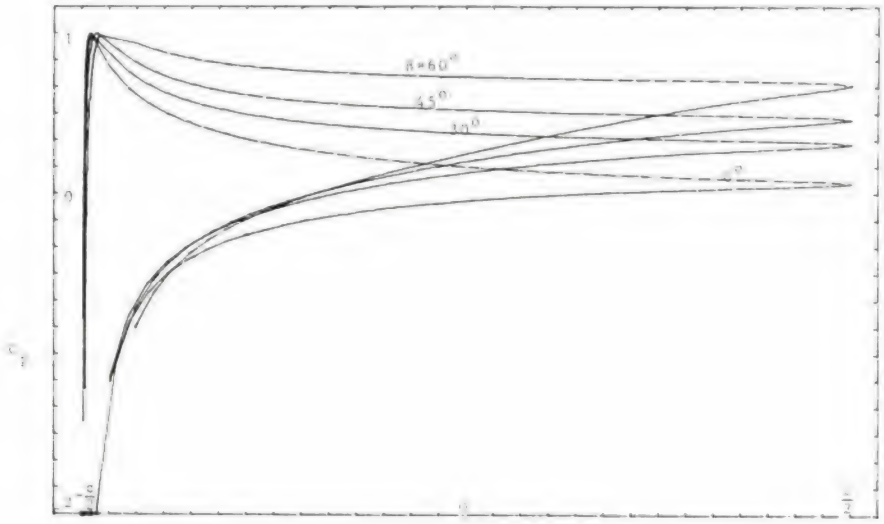


Fig. 5 — Cp sobre o perfil para vários valores de β α'=15° e d/c=1

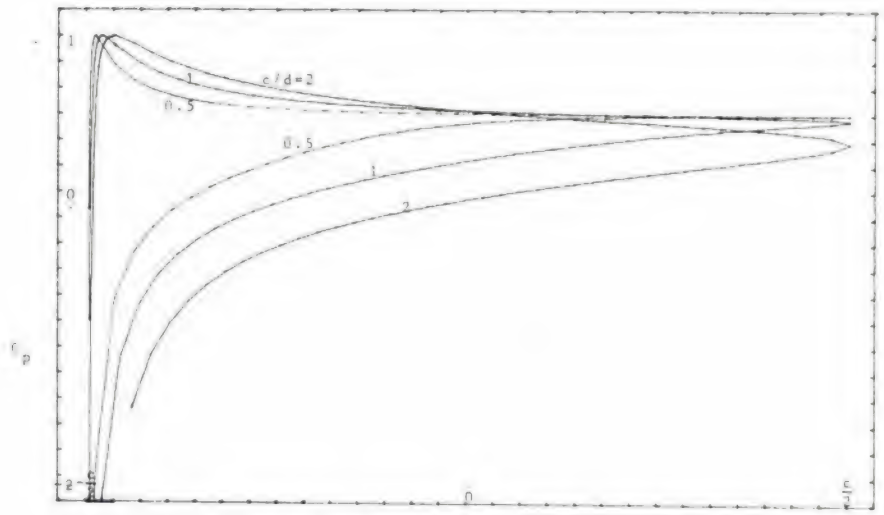


Fig. 6 — Cp sobre o perfil para vários valores de d/c α'=15° e β=45°

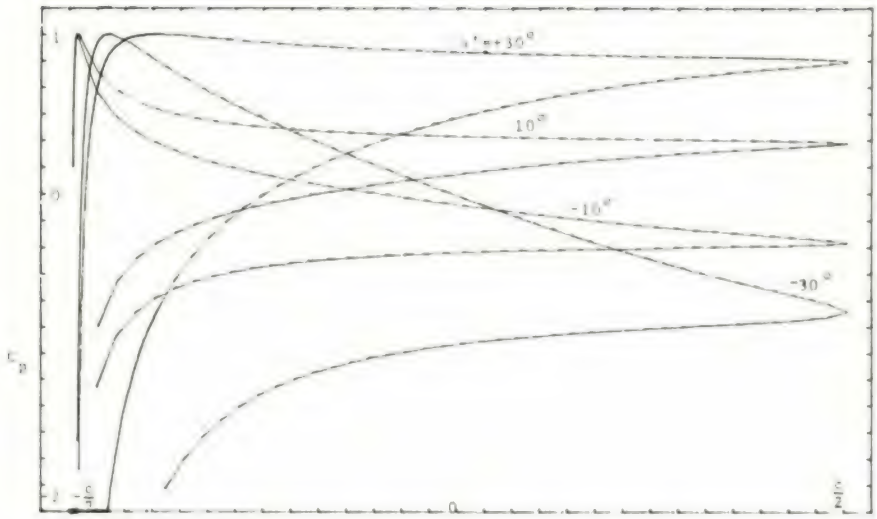


Fig. 7 — Cp sobre o perfil para vários valores de α', β=45° e d/c=1

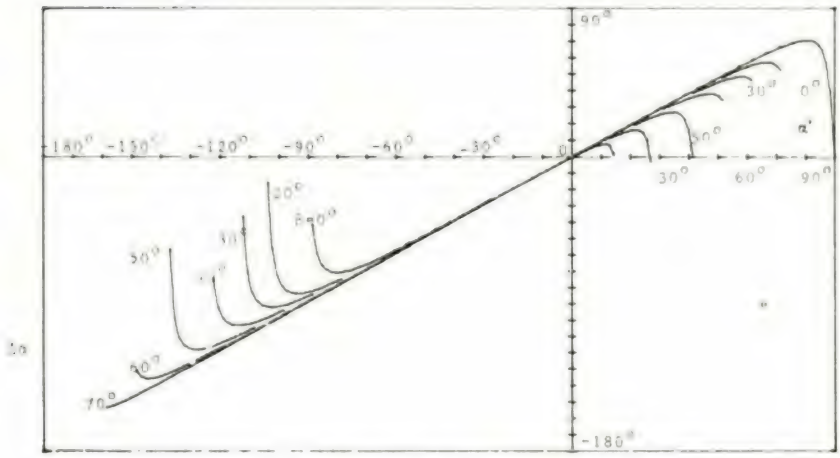


Fig. 8 — $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha''$ em função de α' para vários valores de β e d/c = 1

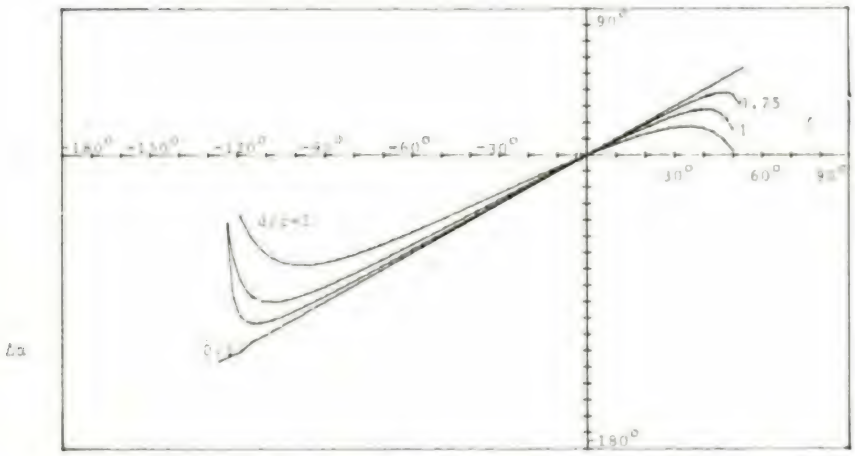


Fig. 9 — $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha''$ em função de α' para vários valores de d/c e β=40°

de deflexão $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha''$ com ângulo de ataque α' para diversas geometrias de cascata. Delas se conclui que para uma dada cascata, quando o ângulo de ataque se aproxima do ângulo de inclinação ou do seu complementar, o ângulo de deflexão cai rapidamente. Fora dessa zona a relação entre os dois ângulos é aproximadamente linear.

A fig. 8 mostra que o ângulo de inclinação não tem influência apreciável sobre a inclinação das curvas na zona aproximadamente linear, afectando porém os limites dessa zona. Na fig. 9 vê-se, como é de esperar, que para valores de d/c pequenos o ângulo de deflexão é aproximadamente igual ao ângulo de ataque. Contudo para valores de d/c grandes, é muito mais pequeno.

Nas fig. 10 e 11 apresenta-se o coeficiente de sustentação C_L em função do ângulo de ataque para valores de d/c e do ângulo de inclinação. O coeficiente de sustentação é $C_L = \frac{L}{1/2 \rho V^2}$ em que L é a força de sustentação e $\vec{V}_m = 1/2 \left(\vec{V}_{-\infty} + \vec{V}_{+\infty} \right)$ é a velocidade média. A fig. 10 mostra que, especialmente para valores elevados do ângulo de inclinação β, o coeficiente de sustentação C_L cai mais rapidamente com o ângulo de ataque para valores positivos deste do que para valores negativos.

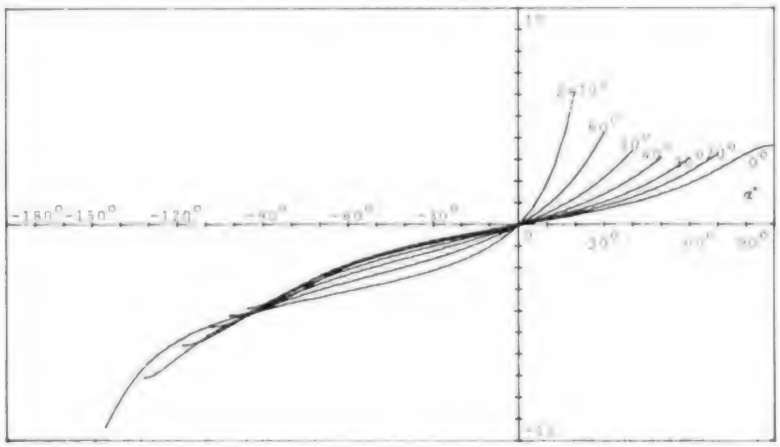


Fig. 10 — C_L em função de α', para vários valores de β e d/c=1

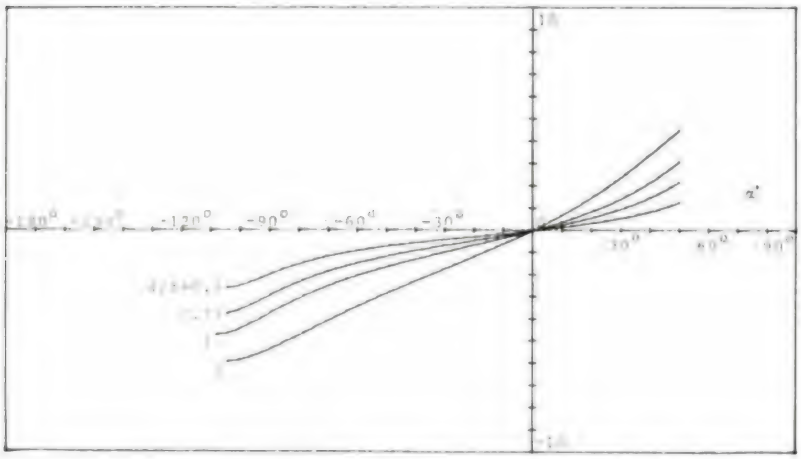


Fig. 11 — C_L em função de α', para vários valores de d/c e β=40°

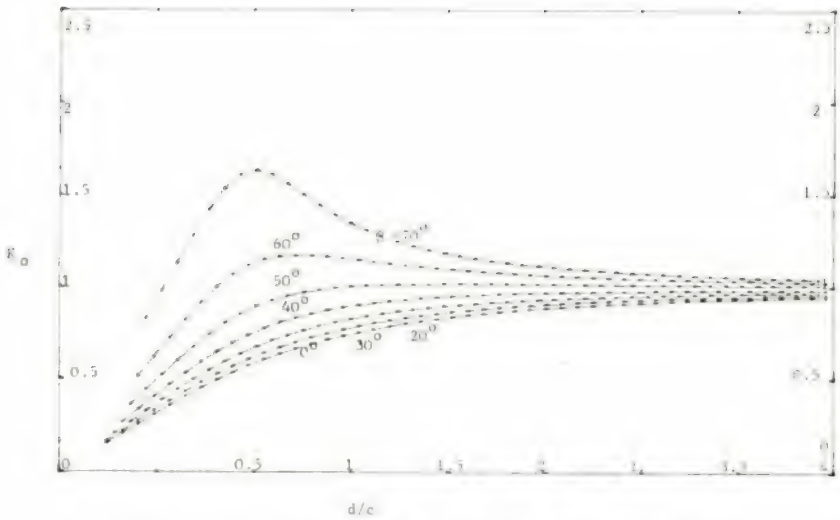


Fig. 12 — K_o em função de d/c, para vários valores de β

A fig. 12 representa a variação do coeficiente de interferência $K_o = \frac{C_{Lcasc.}}{C_{Lisol.}}$ sendo $C_{Lcasc.}$ relativo ao perfil em cascata e $C_{Lisol.}$ relativo ao perfil isolado, com d/c para vários valores do ângulo de inclinação da cascata.

De notar que, no caso limite de d/c = 1 e $\beta = 90°$, a cascata transforma-se num perfil de corda infinita, pelo que o seu coeficiente de sustentação, e portanto K_o, serão infinitos. O coeficiente de interferência é utilizado no projecto de turbimáquinas axiais para corrigir o coeficiente de sustentação obtido para um perfil isolado, sobretudo no caso de pás com pequena curvatura (Ventiladores e compressores axiais).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 — Weinig, F. S.: Theory of Two-dimensional Flow through Cascades, section B, *Aerodynamics of Turbines and Compressors* (Editor: Hawthorne, W. R.), Princeton, 1964.

2 — Weinig, F. S.: *Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen*, Leipzig, 1935.

3 — Karman, Th. von, Burgers, J. M.: General Aerodynamic Theory — Perfect Fluids Division E, *Aerodynamic Theory* (Editor: Durand, W. F.) vol. 2, p. 91-96, Berlin, 1935.

4 — Horlock, J. H.: *Axial Flow Compressors*, London, 1958.

5 — Scholz, N.: *Aerodynamik der Schaufelgitter*, vol. 1, Karlsruhe, 1965.

6 — Sheperd, D. G.: *Principles of Turbomachinery*, London, 1956.

NÚMERO 437 DEZEMBRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVIII

C. D. U. 62.002.1

Programa para resolução duma rede de actividades pelo método do caminho crítico

L. F. C. RORIZ
Assistente do IST
Investigador do CTAMFUL

SUMÁRIO

Embora existam já programas para resolução dum diagrama CPM-tempo por computador, a sua utilização além de onerosa não era didáctica. Por estas razões foi desenvolvido no CTAMFUL, para apoio da Divisão de Termodinâmica Aplicada, um programa para a resolução deste tipo de problemas.

SUMMARY

None of the existing programs for solving CPM--time problems is suitable for teaching purposes, to the author's best knowledge as they are all available in machine language only. Therefore, a new CPM--time solving program was developed at CTAMFUL, with teaching purposes in mind, and has already been used by the Applied Thermodynamics Department students.

A correcta elaboração e planificação dum projecto e sua execução, torna necessário o conhecimento completo da sequência e interligação entre todas as partes componentes. Com a evolução da técnica e consequente aumento da complexidade dos projectos, os antigos métodos de coordenação das diferentes actividades, tais como o gráfico de Gantt, tornaram-se impotentes para realizar um perfeito controle do projecto nas suas diversas fases.

Esta situação apresentou-se primeiramente nos Estados Unidos da América quando do projecto POLARIS, onde a marinha dos U. S. A. necessitava dum controle dos diferentes contratos para o programa de construção de mísseis e quando da construção pela Nemours Company dum conjunto de fábricas de produtos químicos. No primeiro caso foi criado um grupo de trabalho encarregado de elaborar um sistema capaz de avaliar matematicamente as estimativas dos diferentes empreiteiros e determinar a data provável do término do contrato. Este novo sistema passou a ser denominado por Técnica de Avaliação e Revisão de Programas ou PERT (Program Evaluation and Review Technique). No segundo caso a Rand Corporation lançou o método de Planeamento e Programação de Projecto ou PPS (Project Planning and Scheduling).

Estava-se no período de 1956-58. Posteriormente ambos estes sistemas foram desenvolvidos, o segundo dos quais no Método do Caminho Crítico ou CPM (Critical Path Method).

No caso de um projecto, para uma análise correcta dos problemas, torna-se necessário saber o tempo que as diversas etapas constituintes levarão e as respectivas interdependências. Assim, se o custo não for um factor importante, deve-se atender à forma de proceder que nos leve a um tempo mínimo de conclusão da obra em estudo. Deve-se pois atender especialmente ao encadeamento de actividades que determinam o tempo máximo de conclusão da obra. Esta sucessão de actividades é o caminho crítico pois qualquer atraso no fim de uma actividade da cadeia vai-se repercutir no atraso da data mais cedo do evento final ou seja num acréscimo de tempo da conclusão da obra. Desta forma de todas as actividades que são necessárias estarem concluídas para se poder iniciar nova ou novas actividades, deve-se atender essencialmente àquela que termina mais tarde pois é esta que irá condicionar o tempo fim das actividades sucessoras e sobretudo no caso desta actividade fazer parte da cadeia crítica, pois ela irá influenciar directamente o tempo final de conclusão da obra. As outras actividades cujo tempo de execução previsto faz com que a sua conclusão se dê antes de surgir a possibilidade de se passar a uma fase seguinte ficam com uma certa margem de tempo de reserva. Nestes casos a actividade poder-se-á prolongar para

além do tempo previsto, sem ir influenciar o tempo total da obra, desde que a referida margem não seja excedida. Esta, para uma dada actividade é função da conclusão da antecessora e convém portanto saber entre que valores se situa o tempo de reserva disponível, já que o problema a ter sempre em conta é que uma dada actividade não pode terminar para além dum tempo que provoque um aumento do tempo mais cedo do evento fim do sistema de actividades. Por outras palavras pode-se dizer que, como cada evento tem duas datas (data mais cedo e data mais tarde) e que uma actividade tem o seu início num evento e o seu fim noutro, temos quatro tipos de margens ou folgas que são a diferença entre as datas possíveis de início e fim, menos a duração da própria actividade. (Ver a figura 1).

Para a resolução destes problemas, foi desenvolvido no CTAMFUL um programa em FORTRAN utilizando o sistema DOS. Este programa calcula, dado um sistema qualquer de actividades, todas as cadeias, as cadeias críticas, os tempos mais cedo e mais tarde de cada evento e respectiva folga, as margens total, livre, dependente e independente e traça a rede do sistema de actividades, ou apenas algumas destas questões, consoante o interesse do utilizador.

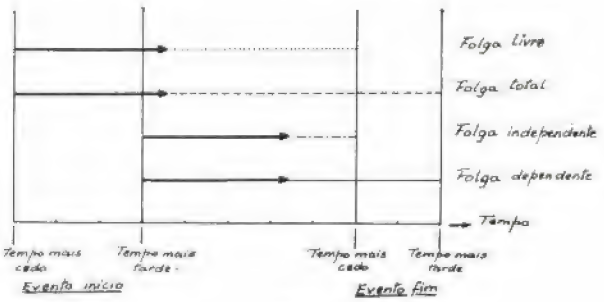


Fig. 1

No caso do exemplo aqui apresentado o sistema de actividades era o representado na figura 2.

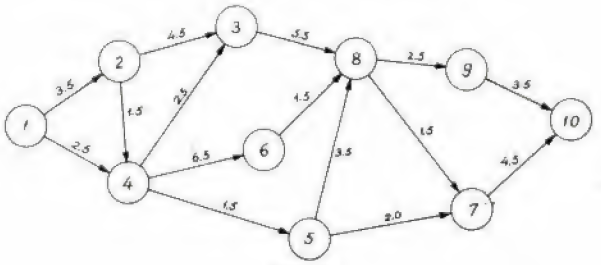


Fig. 2

Foram pedidos, como se pode ver pelos resultados obtidos e apresentados na figura 3, todas as cadeias de actividades, as cadeias críticas, as margens e o traçado gráfico da rede do sistema de actividades.

Neste sistema, dado o número reduzido de actividades, foi possível na execução do traçado gráfico da rede, desenhar todas as ligações entre eventos. No caso de sistemas em que o elevado número de actividades torna impossível o traçado de todas elas, o programa cria conecções numéricas entre os eventos, como se pode observar na fig. 4.

```
NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  6     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          2   3.50        3   8.00        8   13.5        7   15.0        10   19.5

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  6     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          2   3.50        3   8.00        8   13.5        9   16.0        10   19.5

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  7     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          2   3.50        4   5.00        3   7.50        8   13.0        7   14.5        10   19.0

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  7     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          2   3.50        4   5.00        3   7.50        8   13.0        9   15.5        10   19.0

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  6     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          2   3.50        4   5.00        5   6.50        7   8.50        10   13.0

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  7     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          2   3.50        4   5.00        5   6.50        8   10.0        7   11.5        10   16.0

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  7     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          2   3.50        4   5.00        5   6.50        8   10.0        9   12.5        10   16.0

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  7     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          2   3.50        4   5.00        6   11.5        8   13.0        7   14.5        10   19.0

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  7     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          2   3.50        4   5.00        6   11.5        8   13.0        9   15.5        10   19.0

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  6     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          4   2.50        3   5.00        8   10.5        7   12.0        10   16.5

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  6     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          4   2.50        3   5.00        8   10.5        9   13.0        10   16.5

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  5     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          4   2.50        5   4.00        7   6.00        10   10.5

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  6     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          4   2.50        5   4.00        8   7.50        7   9.00        10   13.5

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  6     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          4   2.50        5   4.00        8   7.50        9   10.0        10   13.5

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  6     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          4   2.50        6   9.00        8   10.5        7   12.0        10   16.5

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  6     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          4   2.50        6   9.00        8   10.5        9   13.0        10   16.5

   CADEIA CRITICA

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  6     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          2   3.50        3   8.00        8   13.5        7   15.0        10   19.5

   CADEIA CRITICA

NUMERO DE EVENTOS DA CADEIA=  6     ,EVENTOS QUE A COMPOEM E RESPECTIVOS TEMPOS.
1  0.0          2   3.50        3   8.00        8   13.5        9   16.0        10   19.5

              DATA MAIS CEDO E DATA MAIS TARDE DE CADA EVENTO E RESPECTIVA FOLGA
  1    0.0          0.0          0.0                    2    3.5000       3.5000       0.0
  3    8.0000       8.0000       0.0                    4    5.0000       5.5000       0.50000
  5    6.5000       10.000       3.5000                 6    11.500       12.000       0.50000
  7    15.000       15.000       0.0                    8    13.500       13.500       0.0
  9    16.000       16.000       0.0                   10    19.500       19.500       0.0

        ACTIVIDADE    MARGEM TOTAL     MARGEM LIVRE     MARGEM INDEPENDENTE     MARGEM DEPENDENTE
          1,    2       0.0              0.0              0.0                     0.0
          1,    4       3.0000           2.5000           2.5000                  3.0000
          2,    3       0.0              0.0              0.0                     2.5000
          2,    4       0.50000          0.0              0.0                     0.50000
          3,    8       0.0              0.0              0.0                     9.0000
          4,    3       0.50000          0.50000          0.0                     10.500
          4,    5       3.5000           0.0             -0.50000                 3.0000
          4,    6       0.50000          0.0             -0.50000                 0.0
          5,    7       6.5000           6.5000           3.0000                  13.000
          5,    8       3.5000           3.5000           0.0                     0.0
          6,    8       0.50000          0.50000          0.0                     0.0
          7,   10       0.0              0.0              0.0                     0.0
          8,    7       0.0              0.0              0.0                     0.0
          8,    9       0.0              0.0              0.0                     0.0
          9,   10       0.0              0.0              0.0                     0.0
```

Fig. 3-A

Fig. 3-B

Fig. 4

Neste exemplo, o evento 6 está ligado ao evento 10 não directamente, mas através dum número conector, neste caso o número 23. Notar a posição dos números conectores que não permite qualquer confusão com os números dos eventos.

BIBLIOGRAFIA

Antill, James M. e Wodhead, Ronald W. — CPM aplicado a construções.

Motta, J. E. Magalhães — PERT tempo e custo.

C. D. U. 621.397.3

Projecto, Construção e Utilização de um «Display» óptico «off-line»

J. J. DELGADO DOMINGOS
J. J. AMARANTE DOS SANTOS
M. QUIRINO
A. NEVES DE CARVALHO

I.S.T., C.T.A.M.F.U.L., U.N.L.

RESUMO

A necessidade de representar de modo cómodo o enorme volume de dados gerados na solução numérica das equações às derivadas parciais que regem o escoamento de fluidos e o elevado custo do equipamento existente no mercado levou ao projecto e construção de um «display» óptico e ao desenvolvimento do correspondente «software» de operação. É este o trabalho que se descreve no artigo. O equipamento realizado, centrado sobre problemas de aplicação, além do seu baixo custo, permitiu evidenciar as amplas possibilidades que tal «display» oferece em inúmeros outros domínios.

SUMMARY

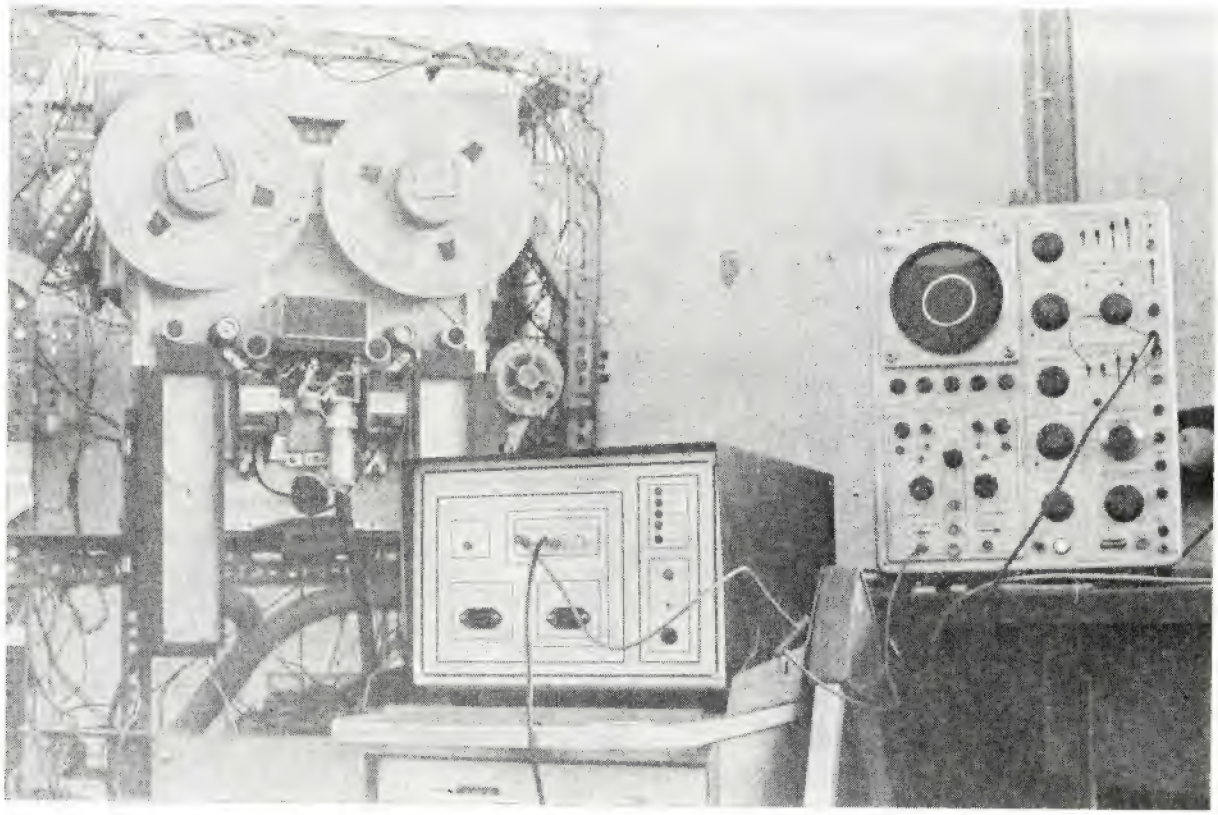
The need for display representation processing numerical data generated on the numerical solution of partial differential equations which govern the flow of viscous fluids, and the very expensive equipment available on the market for visual display motivated the development of the prototype whose hardware and software are described.

The work done stressed the importance of project development centered on applications and showed the cheapness and wide range of applicability of the equipment built.

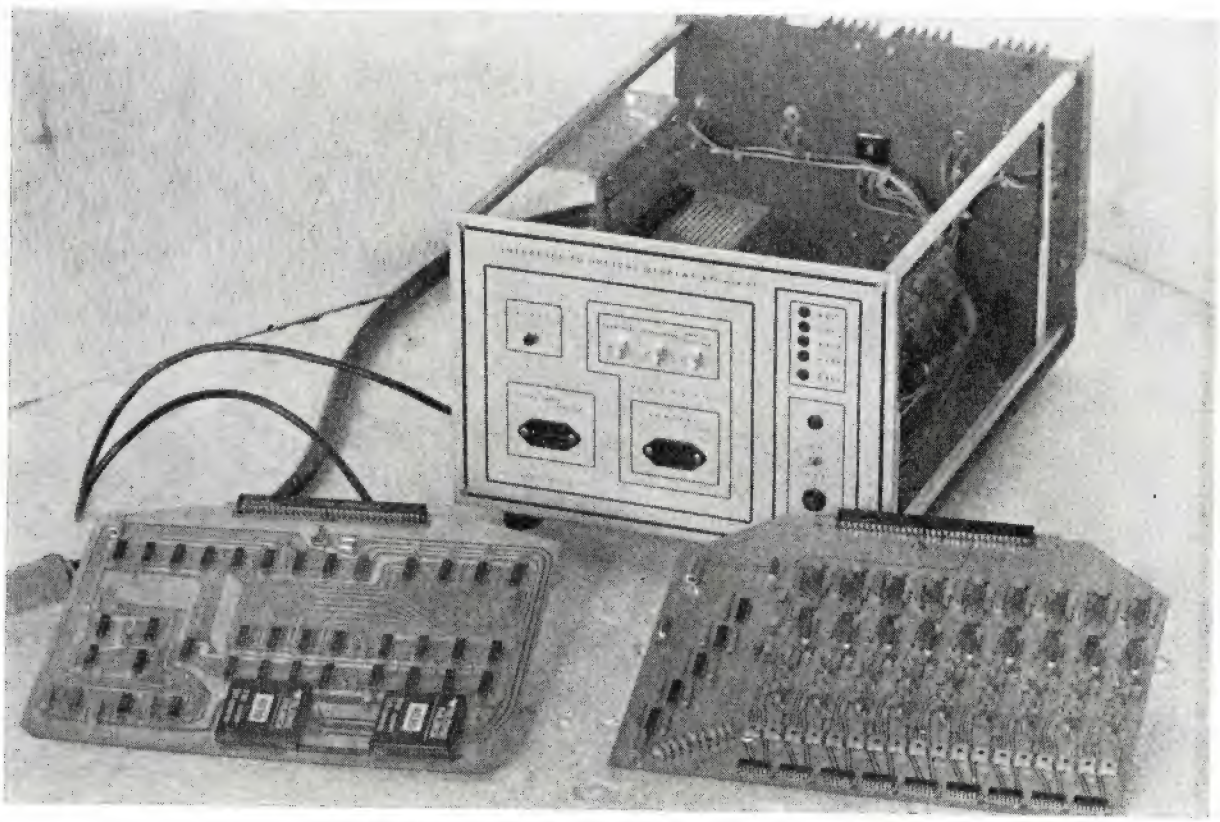
I — MOTIVAÇÃO E HISTÓRIA DO PROJECTO

1. Com o desenvolvimento dos métodos de cálculo numérico no C.T.A.M.F.U.L. para a resolução de equações às derivadas parciais não lineares que regem o escoamento e a transferência de calor num fluido em domínios bi e tridimensionais, cedo se revelaram dificuldades na interpretação do enorme volume dos dados numéricos a que um cálculo corrente pode conduzir, sobretudo tratando-se de processos não estacionários em que interessa estudar pormenores que à partida se desconhece como e quando ocorrem. Efectivamente, mesmo no caso relativamente simples de um escoamento bidimensional isotérmico descrito por uma malha de 20x20 pontos, para cada instante no tempo existem 2x400 valores para as componentes de velocidade e 400 valores para a pressão. Imprimir todos os valores a cada instante, além de implicar um custo proibitivo de papel, torna naturalmente difícil a interpretação. Por outro lado, em fase de estudo de novos métodos ou situações, podem ocorrer anomalias ou instabilidades que se impõe detectar e corrigir. Gera-se assim a situação, algo paradoxal, de um avanço na capacidade de solução de problemas complexos tornar mais difícil a sua interpretação, pelo volume de dados. O paradoxo é, afinal, apenas fruto duma inadequada representação espacio-temporal das soluções numéricas. O método óbvio é condensar tais soluções em representações gráficas tão próximas quanto possível, na sua visualização, do fenómeno físico em estudo. Num fluido, em experiência de laboratório, é prática corrente visualizar o escoamento introduzindo partículas no seu interior e seguir a sua trajectória. O fenómeno é depois quantificado por um número limitado de medidas.

A solução numérica tem, sobre uma experiência de laboratório, em inúmeros casos, a enorme vantagem de ser mais rápida, permitir uma fácil e ampla variação de parâmetros característicos, de ser mais económica e, sobretudo, de ter em conta variáveis típicas do fenómeno real que é impossível



Vista de conjunto: unidade de bandas, interface, osciloscópio



Interface construída e aspecto geral das placas

reproduzir em experiência de laboratório devido a factores de escala.

Fazendo suceder no tempo tais representações gráficas, obter-se-á um filme (tipo desenho animado) do fenómeno, cuja análise se torna desse modo semelhante à de uma experiência de laboratório, ou em escala real, com a vantagem de ser em inúmeros casos a única possível.

Como é óbvio, a representação gráfica animada «dilui» a quantificação fina do fenómeno em benefício da apreciação global e da acentuação das características salientes. Todavia, uma vez obtida a caracterização global, a quantificação fina obtém-se imediatamente fazendo imprimir os valores numéricos correspondentes às variáveis requeridas nos pontos e instantes desejados.

2. O caso anterior é meramente exemplificativo. Em física e engenharia as possibilidades que um traçador de gráficos oferece são inúmeras constituindo um instrumento altamente valioso de investigação e projecto. Um «display» óptico oferece, em relação ao traçador corrente de gráficos em papel, a vantagem da velocidade (que permite a animação directa) e do mais baixo custo.

As enormes vantagens que um novo instrumento oferece num domínio ou em múltiplos domínios de trabalho não são, todavia, razões bastantes para que se disponha de recursos para o adquirir. Tal foi o caso do C.C.U.L. e C.T.A.M.F.U.L. Porém, a ligação estreita entre os dois, a enorme vantagem que a existência de tal instrumento representa e a crença generalizada entre nós (na altura em que o projecto se iniciou) de que a construção de tal equipamento ultrapassava largamente as possibilidades nacionais com os meios humanos e materiais disponíveis, constituiu desafio bastante para quem tinha dessas capacidades uma visão menos derrotista, para atacar o problema. Os parâmetros em que o mesmo tinha de ser abordado e resolvido estavam, à partida, claramente delimitados:

a) O sistema deveria ser compatível com o computador IBM 360-44 do C.C.U.L. mas off-line, devido às restrições impostas pelos contratos de manutenção que na altura não interessava ultrapassar.
b) A visualização deveria ser feita num osciloscópio de que o C.T.A.M.F.U.L. dispunha.
c) Os dados deveriam ser gravados pelo computador em banda magnética standard. Esta seria posteriormente transportada para um desenrolador de bandas que accionaria «display».
d) A traçagem de gráficos, a variação de intensidade luminosa e o accionamento de uma máquina de filmar deveriam ser suportados por um «software» de tal modo concebido que um utilizador corrente do C.C.U.L. o pudesse utilizar sem necessitar qualquer preparação ou conhecimento especial.

O ter-se previsto o accionamento duma máquina de filmar destinava-se apenas a futuros utilizadores sem acesso directo ao «display», ou para a elaboração de filmes didácticos. Efectivamente, dispondo do »display» e da banda gravada, a visualização no osciloscópio é imediata e pode repetir-se quantas as vezes desejadas.

A realização dos objectivos anteriores exigia um desenrolador de bandas... que não havia recursos para comprar. Foram, todavia, obtidos de sucata componentes de unidade IBM desmanteladas.

A tarefa inicial, de que se ocuparam Pedro G. de Oliveira, A. Neves de Carvalho e colaboradores do C.T.A.M.F.U.L. foi a decifração dos circuitos e a reconstrução de uma unidade de bandas. A partir dela, foram projectadas e realizadas as interfaces. A filosofia seguida no projecto é descrita em II.

Da concepção e desenvolvimento do «software» necessário ocupou-se M. Quirino com a colaboração do programador Legateaux Martins. Este trabalho é descrito em III.

Logo que o conjunto ficou operacional, o mesmo passou a testes de utilização. O primeiro, e mais natural, foi um exemplo concreto de Mecânica dos Fluidos, o qual começara por motivar todo o trabalho dada a importância de que se revestia. A primeira aplicação esteve a cargo de J. J. Amarante dos Santos e é descrita em IV.

O projecto, na sua realização, conheceu naturais vicissitudes e levou alguns meses a concretizar-se. O custo final foi largamente inferior ao de uma unidade adquirida além do que possibilitou em aquisição de conhecimentos, tecnologia e... à vontade, que de outro modo nunca teriam sido obtidos.

Realizado o protótipo, muitas outras possibilidades foram encaradas e serão ou não desenvolvidas consoante os eventuais utentes. Refira-se, nomeadamente, que o «display» pode ser ligado on-line ao computador IBM 360, dispensando assim a passagem pelo suporte intermédio das bandas magnéticas.

Entretanto, o aparecimento no mercado de unidades de bandas relativamente baratas permite encarar a construção e comercialização de um «display» a preços que se presumem altamente competitivos. Todavia, essa alternativa ultrapassa o âmbito do C.T.A.M.F.U.L. tanto mais que a equipa de «software-hardware» responsável pela concretização do «display» se encontra hoje integrada no Departamento de Informática da Universidade Nova de Lisboa por cujo arranque foi responsável o autor destas linhas. Finalmente, importa assinalar o objectivo de aplicação concreta que presidiu à realização a qual se reflecte na concepção particular do protótipo. Tal orientação teve consequências extremamente benéficas.

Não se reclama para o protótipo nenhuma particular sofisticação técnica. Reclama-se, sim, a vastíssima gama de problemas que o mesmo permite

tratar, utilizando apenas os meios estritamente necessários em claro detrimento da exibição em que são férteis tantas realizações neste domínio.

J. J. D. D.

II — HARDWARE

1 — Dados base do projecto

A unidade construída é do tipo normalmente designada por «display X, Y gerador de vectores». As suas características principais são:

- Funcionamento compatível com qualquer tubo de raios catódicos de osciloscópio (tamanho usual do ecran 8x10 cm).
- Precisão de 256 pontos equidistantes por eixo (para um eixo de 10 cm o valor da menor divisão de escala é de $\frac{1}{2{,}56}$ mm).
- Geração por «hardware» do segmento de recta compreendido entre dois pontos consecutivos correspondentes ao valor de dois pares de coordenadas fornecidas pela unidade de bandas.
- Controle do feixe luminoso em três intensidades: máxima, média e feixe apagado.
- Sinal permitindo o controle por «software» do disparo de uma máquina de filmar.
- Número máximo de pontos distintos por imagem sem causar problemas de persistência óptica: 1000 pontos.

A unidade é constituída pelo desenrolador de bandas, pelo osciloscópio funcionando no modo X, Y e pela interface.

Paralelamente com o projecto de «hardware» decorreu o projecto de «software» de investigação em computação gráfica que realizou todo o «software» necessário à utilização cómoda da unidade e cuja actividade de diálogo com a equipa de «harware» foi altamente positiva.

2 — Descrição do modo de gravação das bandas magnéticas do computador IBM 360/44

Como o suporte de informação é a banda magnética, a filosofia da interface foi condicionada pela forma como a informação nela está gravada e pela velocidade de desenrolamento da unidade de bandas. Para melhor situar o problema descrevem-se sucintamente as características técnicas das unidades existentes no CCUL nomeadamente: velocidade, organização da informação em banda e modos de gravação possíveis.

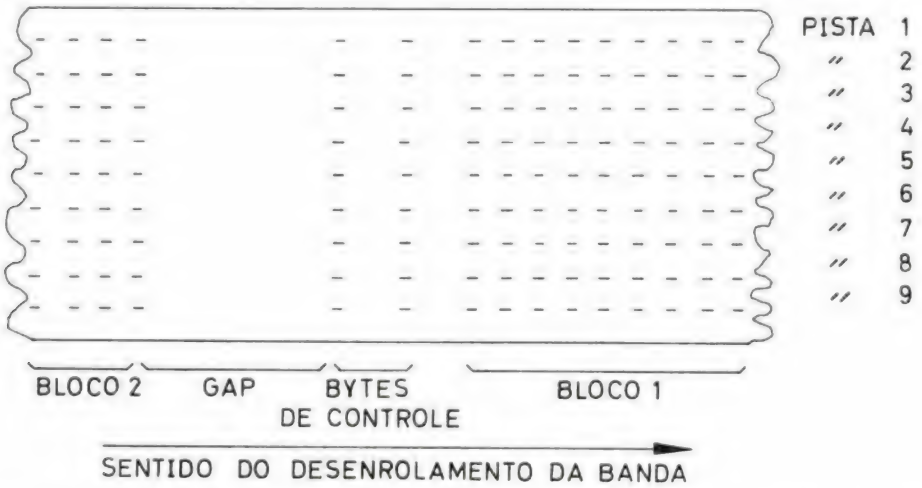
A velocidade de desenrolamento da unidade de bandas é de 37,5 polegadas/segundo.

A informação é gravada em 9 pistas, havendo uma cabeça de leitura de nove canais que permite o acesso a nove bits em paralelo, sendo 8 bits de informação e o nono de controlo de paridade. O controlo de paridade é ímpar (em cada conjunto de 9 bits que aparecem em paralelo tem de haver sempre um número ímpar de «1» lógicos).

A organização «hardware» do computador é tal que o número mínimo de bits a que se tem acesso é 9. A cada conjunto de 9 bits, 8 de informação mais um de paridade, chama-se byte.

Os bytes são escritos em banda em blocos de informação separados por espaços de fita, chamados GAP's, sem qualquer conteúdo informativo. O tamanho dos blocos de informação é variável sendo a sua dimensão controlada por «software». De modo mais preciso, depois do último byte de cada bloco existem dois bytes de teste da informação do bloco. Só a seguir é que aparece o «gap» propriamente dito.

Esquematicamente a organização é



3 — Filosofia dos dois modos possíveis de gravação em banda

O princípio base de registo da informação em bandas magnéticas é a variação de fluxo magnético.

As unidades IBM têm dois sistemas principais de registo de informações designados por phase encoder (codificação por fase; (P, E)), e NRZI (no return to zero inverter).

O primeiro destes sistemas permite uma densidade de gravação de 1600 bytes por polegada (1600 bpi) e a forma de registo é tal que um «1» lógico corresponde a uma variação positiva do fluxo magnético e um «o» lógico corresponde a uma variação negativa.

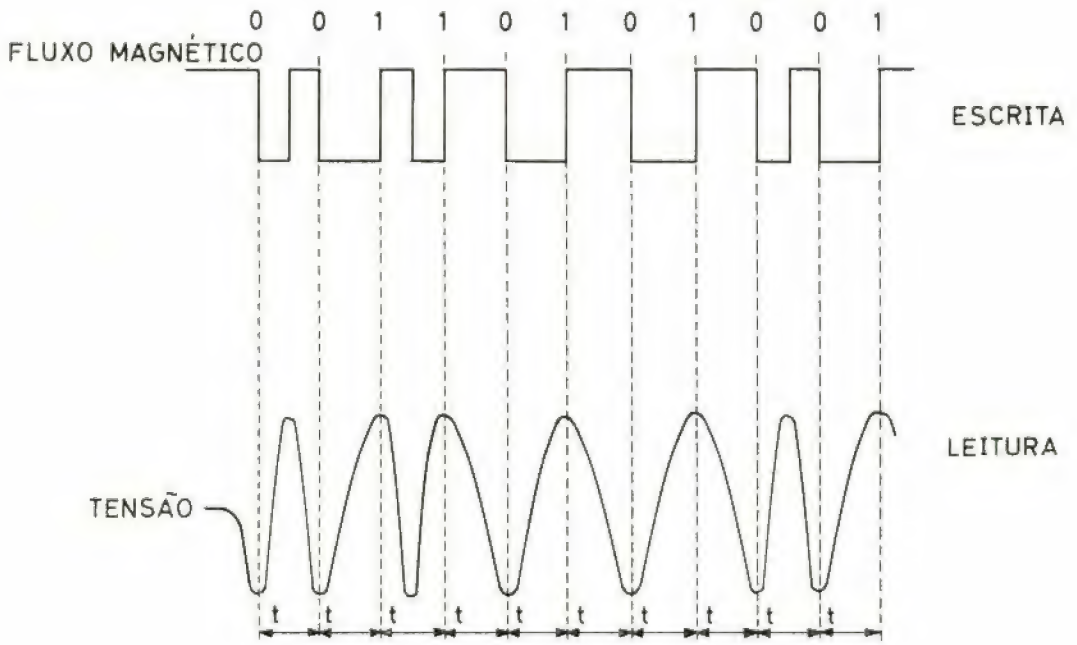
Quando da leitura, a tensão induzida aos terminais da cabeça de leitura tem a forma de uma sinusoide modulada em frequência em que cada máximo de tensão corresponde a um «1» lógico e cada mínimo corresponde a um «o» lógico. Atendendo à densidade de gravação e velocidade de desenrolamento deduz-se que a frequência do fluxo informativo é de 60 KHZ.

Exemplifiquemos com a seguinte sequência de informação 00110101001.

4 — Filosofia geral do projecto

A primeira opção a ser feita foi a escolha do modo de gravação.

Dado que em phase encoder se torna muito difícil conseguir sincronizar o sistema devido não só à alta densidade de gravação como também ao facto do sinal gravado só possuir informação útil em instantes determinados dependentes do sinal de sincronismo geral do computador, cedo se concluiu que este sistema de gravação não era susceptível de ser adoptado. Pelo contrário, em NRZI sempre que há um máximo ou um mínimo do sinal lido estamos em presença da codificação de um «1» lógico. Este facto, conjugado com a paridade ímpar, permite distinguir os intervalos de tempo em que existe informação útil na banda, pois nesses instantes pelo menos uma das pistas terá a codificação de um «1» lógico. Quando todas as pistas contiverem zeros lógicos num dado instante pode-se concluir que esse não é o momento de leitura correspondente à informação válida.



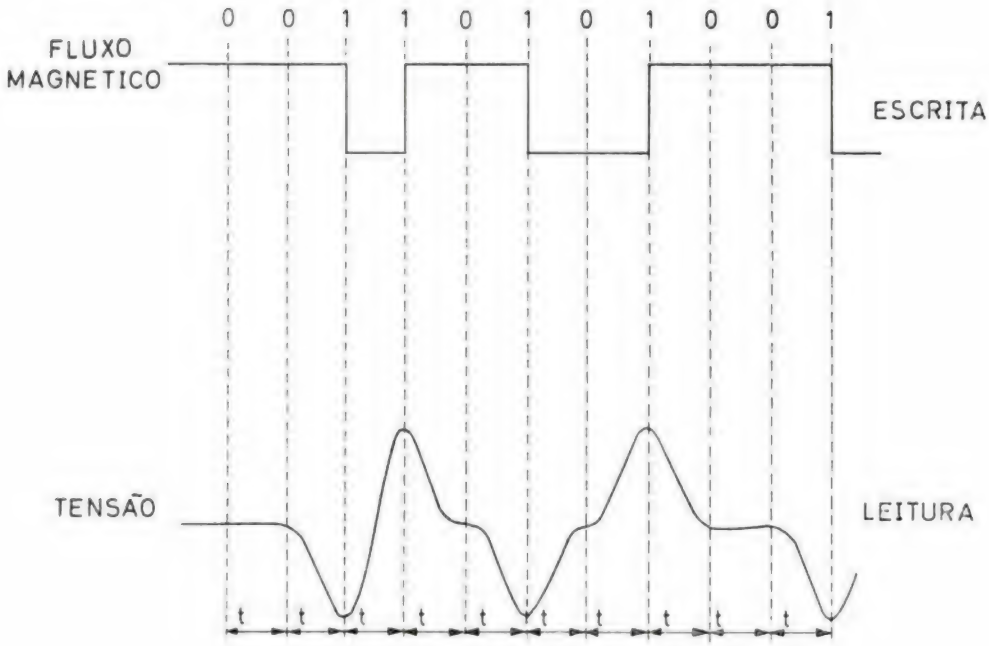
O outro sistema admite uma densidade de gravação de 800 bpi sendo a frequência do fluxo informativo de 30 KHZ.

Neste sistema, o registo da informação lógica «o» não corresponde a nenhuma variação de fluxo magnético e o registo de «1» lógico corresponde à variação de fluxo positiva ou negativa. Na leitura, a um máximo ou um mínimo de tensão, corresponde sempre a «1» lógico; os zeros lógicos correspondem a uma tensão nula.

Com fins comparativos desenha-se os diagramas de escrita e leitura em NRZI do mesmo conjunto de informação.

Depois de fixado o modo de gravação, e portanto a velocidade de fluxo informativo, tentou-se optimizar os valores dos seguintes parâmetros:

— Máxima precisão do gráfico; isto é: refinamento máximo do número de pontos por eixo, distinguíveis pela vista humana, tendo como dado o tamanho usual de um ecran de osciloscópio (8x10 cm).
— Máximo número de pontos distintos possíveis de representar sem que surjam problemas de variação de persistência.



A interdependência entre eles é manifesta se atendermos a que o aumento de sensibilidade por eixo implica um maior número de bits para codificar a informação e como a frequência é constante (30 000 bytes/segundo) o número de pontos possíveis de representar por imagem sem «flicker» diminui.

Numa tentativa de optimizar estes parâmetros chegou-se à seguinte solução:

A informação correspondente a um ponto do ecran é codificada em três bytes consecutivos sendo o 1.º (8 bits) para o eixo dos X; o 2.º (8 bits) para o eixo dos Y e o 3.º (8 bits) destinado a controlar a luminosidade do ponto e o disparo de uma máquina fotográfica.

Deste modo o número máximo de pontos por eixo é de $2^8 = 256$. Através do byte de controle é possível regular a intensidade luminosa do ponto por actuação no feixe de electrões do tubo podendo-se distinguir três intensidades: feixe apagado, intensidade média e intensidade máxima.

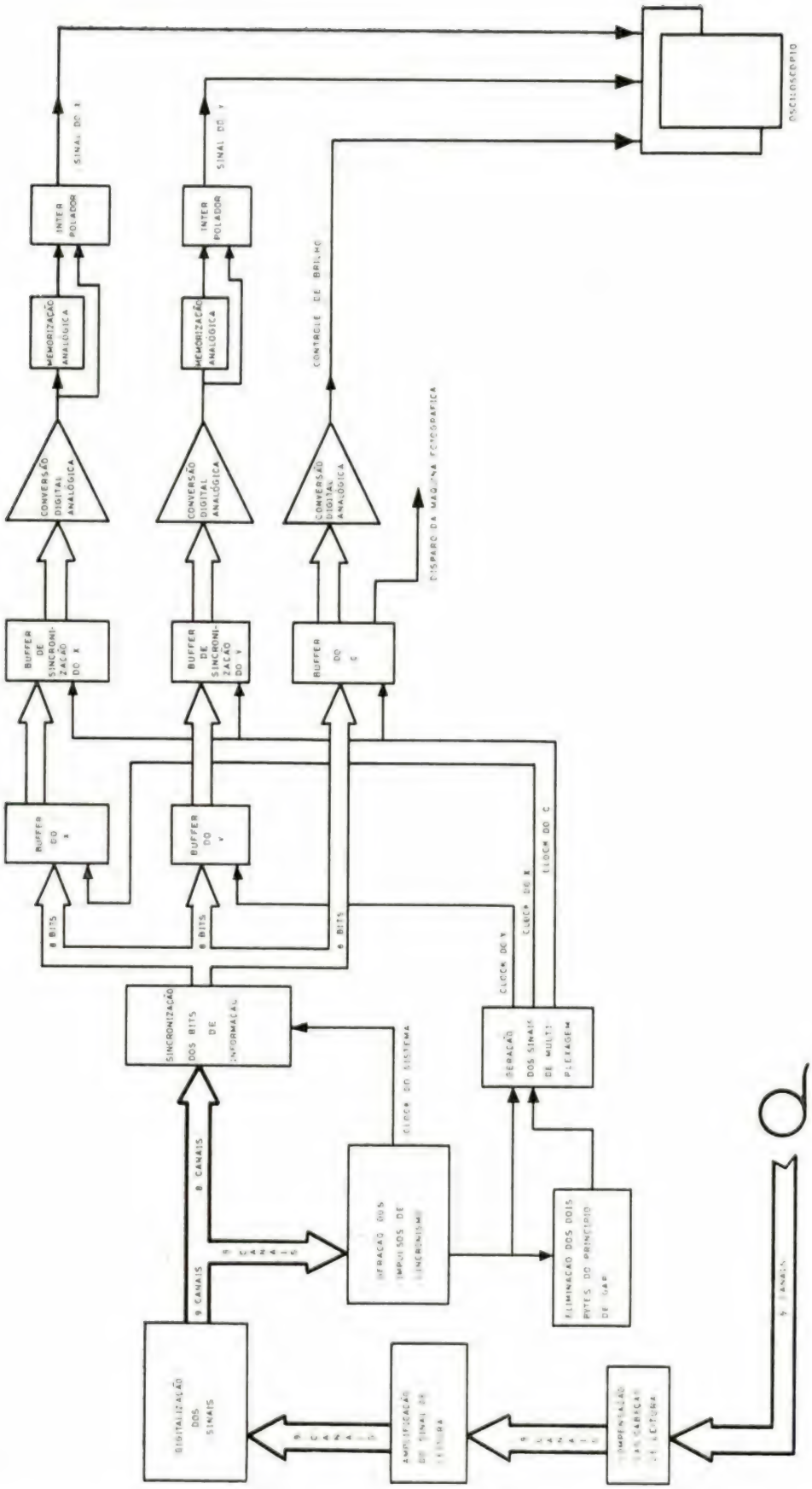
Por serem utilizados 3 bytes por ponto a frequência de geração de pontos distintos no ecran é de 10 KHZ. Por «hardware» é traçado o segmento de recta compreendido entre dois pontos consecutivos (x_1, y_1, c_1) (x_2, y_2, c_2) sendo a intensidade luminosa do segmento controlada pela informação contida no byte de controlo c_1.

5 — Descrição do Dispositivo

Para efeitos de sistematização da descrição o dispositivo pode ser reduzido ao diagrama de blocos a seguir apresentado. Nem todos os blocos mencionados são estruturalmente independentes mas do ponto de vista lógico podem-se considerar como tal.

Os nove sinais analógicos (correspondentes a 1 byte de informação) presentes à saída das nove cabeças de leitura da unidade de bandas são primeiro tratados numa malha passiva a fim de adaptar o cabo de transmissão e de compensar em frequência as cabeças. Depois de compensados, cada um dos nove sinais é amplificado e depois digitalizado. Após este tratamento o fluxo de informação desdobra-se em duas vias. Por um lado é feita uma disjunção lógica dos nove sinais, por outro lado os oito bits de informação são armazenados em flip flops do tipo RS.

Esta memorização intermédia tem por fim evitar os inconvenientes resultantes do desalinhamento das cabeças de leitura. Assim que aparecer à entrada de um dos biestáveis um bit de informação ele é armazenado podendo ser depois processado sob o comando do sinal de sincronismo do sistema. Deste modo a informação a partir destes biestáveis estará sincronizada. Resta analisar como é obtido o sinal de sincronismo. O flanco de subida do primeiro sinal que aparecer à saída do circuito de disjunção faz disparar um monoestável de largura ajustável. A largura do sinal de sincronismo assim gerado determina a tolerância que é admitida para as cabeças. Quanto maior for o tempo deste monoestável maior será a imunidade do sistema ao desalinhamento das cabeças. O limite superior deste tempo terá que ser tal que não possa ser lida nova informação sem o monoestável estar de novo na sua posição estável. No flanco de descida do sinal assim gerado é lida a informação contida nos biestáveis RS, fazendo-se, em seguida o «reset» dos mesmos. O sinal de sincronismo actua


OSCILOSCÓPIO
SINAL DO X
SINAL DO Y
INTER POLADOR
INTER POLADOR
MEMORIZAÇÃO ANALÓGICA
MEMORIZAÇÃO ANALÓGICA
CONTROLE DE BRILHO
CONVERSÃO DIGITAL ANALÓGICA
CONVERSÃO DIGITAL ANALÓGICA
CONVERSÃO DIGITAL ANALÓGICA
DISPARO DA MÁQUINA FOTOGRÁFICA
BUFFER DE SINCRONIZAÇÃO DO X
BUFFER DE SINCRONIZAÇÃO DO Y
BUFFER DO C
BUFFER DO X
BUFFER DO Y
8 BITS
8 BITS
8 BITS
CLOCK DO Y
CLOCK DO X
CLOCK DO C
SINCRONIZAÇÃO DOS BITS DE INFORMAÇÃO
CLOCK DO SISTEMA
GERAÇÃO DOS SINAIS DE MULTIPLEXAGEM
8 CANAIS
9 CANAIS
9 CANAIS
INTERCAO DOS IMPULSOS DE SINCRONISMO
ELIMINAÇÃO DOS DOIS BYTES DO PRINCÍPIO DE CADA
DIGITALIZAÇÃO DOS SINAIS
AMPLIFICAÇÃO DO SINAL DA FITA
IMPRENTAÇÃO DAS CABEÇAS DE LEITURA
9 CANAIS

ainda o sistema multiplexor que permite comandar nos instantes correctos as memórias tampão correspondentes ao X, Y e C. Este sinal é também tratado de modo a detectar-se o início de «gap» com o fim de inibir os comandos das memórias tampão e reposecionar o sistema de multipexagem de modo a que o próximo comando volte a ser para a memória tampão correspondente ao eixo dos X.

O comando designado por «clock do c» permite a passagem simultânea da informação correspondente ao terno ordenado para a entrada dos conversores digitais analógicos onde a informação digital é convertida numa tensão analógica proporcional à informação binária. Após a interpolação analógica, os três sinais resultantes vão finalmente atacar os amplificadores horizontal e vertical e o circuito de controle de intensidade do feixe do osciloscópio.

A descrição detalhada do dispositivo do ponto de vista electrónico e lógico é feita no relatório final que se encontra em vias de publicação.

III — SOFTWARE: PGBD — «PACKAGE» GRÁFICO BÁSICO PARA DISPLAY

1 — Breve nota histórica

No processo histórico de desenvolvimento de periféricos de saída gráfica a solução dum «graphical-display» comandado «off-line» por uma banda magnética representa o sucessor do «plotter» a que se acrescenta a capacidade de modificação da imagem e consequentemente de movimento da mesma.

Enquanto que para fazer a análise dum processo dinâmico utilizando a saída por «plotter» se era obrigado a representar a variável tempo como uma dimensão espacial, o que se traduzia no desenrolar contínuo do papel para a representação do fenómeno ao longo dum determinado intervalo de tempo ou na representação apenas de instantâneos do processo em momentos privilegiados previstos pelo programa, aqui, a possibilidade de modificação da imagem ao longo do tempo de simulação do processo permite ao utilizador «assistir» ao desenrolar do fenómeno numa escala de tempo por ele escolhida.

Actualmente, mesmo em centros dispondo de meios de computação gráfica mais sofisticados e com capacidade de interacção, mais de 80% da utilização desse equipamento é feita em saídas deste tipo, o que significa que as reais capacidades desses sistemas não estão sendo exploradas quer porque os problemas tratados não necessitam de facto delas e são tipicamente problemas com saída gráfica apenas, quer porque a maior parte dos programas de aplicação que são utilizados provêm de adaptações de programas inicialmente concebidos para «plotter» e utilização em «batch».

Rosenfeld, [5], classifica a Computação Gráfica de acordo com o modo de representação dessa mesma informação à entrada e à saída do sistema. Admite para tal que a informação gráfica é representada ou por uma imagem ou por uma descrição que tanto pode ser um conjunto de números (caso das coordenadas dos pontos duma curva) como uma fórmula matemática (algoritmo) que descreve a forma de a obter.

S \ E	Imagem	Descrição
Imagem	Tratamento de imagens	Geração de imagens
Descrição	Análise de imagens	«Tudo o resto»

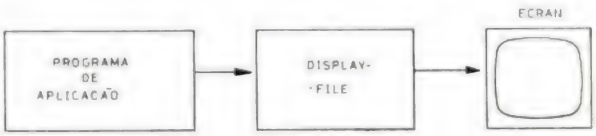
Fig. 1 — Classificação de Rosenfeld

As aplicações a que o «graphical-display off-line» dá solução situam-se segundo esta classificação na categoria de problemas que usam da Computação Gráfica o subconjunto relativo à *geração de imagens* apenas.

Note-se que esta classificação não é sempre utilizada e outros autores tais como Newmann e Sproull [6] e Prince, [7] e nós próprios em [8] apenas consideram a Computação Gráfica a partir da introdução da interação, i.e., com diálogo Homem/Máquina.

2 — Concepção dum Package Gráfico Básico para Display

Quando se tem um programa de aplicação que gera imagens para serem apresentadas num ecran como meio de saída (on-ou off-line) existe uma etapa intermédia que é a da constituição da «display-file» a qual contém a informação gráfica a sair na forma de instruções que comandam o movimento do feixe luminoso sobre o ecran.



Para que o utilizador dum domínio de aplicação possa estar liberto dos pormenores técnicos associados a essa etapa deve poder dispor duma linguagem de programação que contenha uma extensão gráfica, i.e., que permita ao utilizador o envio de imagens para o ecran através de instruções do mesmo tipo das outras saídas.

O package gráfico base para «display», (PGBD) aqui apresentado é um conjunto de subrotinas que permitem ao utilizador FORTRAN obter um número qualquer de imagens, tendo como únicas limitações, o número de pontos de cada imagem não exceder 1000 e o tempo total de representação não exceder o tempo de leitura contínua da banda magnética pela unidade de leitura.

As imagens são construídas pelo utilizador na forma de um conjunto de pontos que descrevem um caminho que o ponto luminoso deverá seguir, e a intensidade luminosa que o feixe deve apresentar entre cada dois pontos.

Toda a construção de ficheiros de imagens assim como o seu tratamento e escrita na banda magnética em forma compatível com o hardware» serão do ponto de vista do utilizador realizadas automaticamente e as áreas de memória de trabalho reservadas sem a sua intervenção.

O terminal gráfico a que se destina este package é constituído por um leitor contínuo de banda magnética, uma unidade de controle e um ecran de raios catódicos.

Cada instrução da «display-file» é um triplo de valores (3 bytes) que representam respectivamente as coordenadas (x, y) do ponto a que se referem e atributos da imagem associados a esse ponto.

Uma instrução faz o feixe deslocar-se da posição onde se encontra para uma nova posição sobre o ecran, podendo o trajecto ser percorrido pelo feixe com 3 possíveis intensidades luminosas (apagado, intensidade média e máxima).

O terceiro byte contém ainda informação que permite decidir sobre o disparo ou não de uma máquina fotográfica assim como outras informações de controlo do «hardware».

O PGBD assume que a origem do referencial está colocada no canto inferior esquerdo do ecran e a unidade de controle assume que a informação correspondente às coordenadas X e Y pertence ao intervalo (0,255).

Dado que o G. D. não dispõe de dispositivo de refrescamento, isto é, não repete automaticamente a imagem representada tantas vezes quantas as necessárias para que o fósforo do ecran retenha a imagem por um tempo suficiente para que a vista humana a construa, o refrescamento é feito pelo «software» segundo a indicação que o utilizador dá para o tempo de permanência da imagem.

3 — Descrição do PGBD

O conjunto de subrotinas que o PGBD põe à disposição do utilizador pode classificar-se em dois tipos. Um que se ocupa da organização da «display-file» e o outro da construção das imagens. O primeiro é constituído por instruções do tipo OPEN e CLOSE cujo funcionamento pouco interessa ao utilizador excepto em que é o veículo de valorização dos atributos das imagens através dos parâmetros. O segundo grupo interessa mais directamente ao utilizador pois constitue a via de descrição das saídas gráficas do problema (construção de imagens). São apenas duas as subrotinas deste tipo, PLOT e LINE, a primeira movimentando o feixe luminoso apenas de um ponto para outro directamente e a segunda através de uma sequência de pontos intermédios.

Tudo o que se refere aos atributos das imagens tais como luminosidade, movimento, tempo de exposição, etc. é dado através dos parâmetros das subrotinas.

A função de transformação da imagem para a sua colocação no ecran em coordenadas absolutas pode ser feita pelo «software» desde que o utilizador o especifique nos parâmetros correspondentes. Isso permitir-lhe-á enviar os resultados nas dimensões próprias do problema sem se preocupar com as dimensões e coordenadas do ecran.

Tem-se portanto [1]:

1.° tipo Organização da «display-file»	2.° tipo Construção de imagens
OPENDI	PLOT
OPENIM	LINE
CLOSEI	

As diferentes subrotinas permitem realizar as seguintes funções:

OPENDI — indicar o início de saídas gráficas e receber do utilizador indicações sobre transformações das imagens a representar quanto a translações e homotetias das mesmas;

OPENIM — indicar o início de uma imagem;

CLOSEI — além da indicação de fim de imagem esta subrotina contém as indicações sobre o tempo de representação, sobre a fotografia e sobre se é a última imagem a representar;

PLOT — indicar o novo ponto a representar e receber indicações sobre a intensidade luminosa da sua representação;

LINE — além da indicação das variáveis indexadas que contêm as diferentes coordenadas dos pontos da linha a

[1] Para a descrição completa das subrotinas e seus parâmetros consultar o manual do utilizador.

representar, contém informação sobre a intensidade luminosa da sua representação.

O utilizador deve chamar a subrotina OPENDI para preparar a construção da «Display-file» pelo computador e construir cada imagem por sucessivas chamadas das subrotinas PLOT e LINE. As diferentes chamadas de PLOT e LINE com vista a construir uma imagem devem ser enquadradas entre a chamada da subrotina OPENIM que indica o início duma imagem e a chamada da subrotina CLOSEI que indica o seu fim.

O utilizador pode construir tantas imagens quantas quiser, tendo apenas limitações referentes aos tempos de exposição que impõe e à dimensão de banda utilizada para registar a informação para o G. D.

A sucessão típica de chamadas para o terminal gráfico é portanto dentro do programa normal do utilizador a seguinte:

CALL OPENDI — abertura do G. D.
CALL OPENIM — abertura da 1.ª imagem

Construção da imagem com auxílio de PLOT e LINE

——
——
——
CALL PLOT
——
——
——

CALL LINE
——
——
——

CALL CLOSEI — fecho da 1.ª imagem.
.
.
.
CALL OPENIM — abertura da enézima imagem

Construção da imagem com auxílio de PLOT e LINE

——
——
——
CALL PLOT
——
——

——
CALL LINE
——
——
——

CALL CLOSEI — fecho da enézima imagem e do G. D.

Entre a chamada de quaisquer 2 subrotinas do PGBD podem existir quaisquer outras instruções FORTRAN do programa de aplicação.

4 — Conclusão

A possibilidade de definir o tempo de exposição de uma imagem no ecran e de fazer variar o valor desse parâmetro permite a construção de desenho animado a partir de instantâneos no tempo. Embora ainda não tenha sido convenientemente explorada essa possibilidade tem interesse em problemas cuja solução não é calculada de forma contínua (ainda que discretizada em pequenos intervalos de tempo) como é o caso das aplicações aqui apresentadas.

Além disso para os utilizadores com vocação artística esta poderá ser uma via de realização de desenho animado.

Esta facilidade está pouco implementada noutros sistemas mas pode permitir interessantes explorações não só de tipo artístico como didático.

IV — APLICAÇÃO DO PGBD A UM PROBLEMA DE MECÂNICA DE FLUIDOS

1 — Primeira utilização

A fim de se testar a qualidade dos filmes que poderiam ser obtidos através do sistema descrito anteriormente, escolheu-se o programa SMAC [11], que resolve problemas de mecânica de fluidos em domínios bidimensionais, com superfície livre.

Duas das características do método tornam-no particularmente adequado à feitura de filmes: a utilização de partículas sem massa, para definir a superfície livre, possibilita a visualização do escoamento; e o facto de se tratar de um método explícito, gastando pouco tempo de cálculo entre a geração de duas imagens (em virtude de o número de imagens ter que ser elevado, tem de usar-se um passo no tempo pequeno, não existindo portanto problemas de instabilidade).

Antes de se fazerem testes com escoamento de fluidos, fizeram-se alguns testes preliminares para a geração de imagens fixas, nomeadamente circunferências. Foi necessário nessa altura fazer ligeiras alterações à subrotina DISP do PGBD, usando-se buffers de tamanho variável e contendo um número inteiro de imagens.

A decisão de se usar o programa SMAC para estes testes preliminares em vez de usar outros programas do CTAMFUL resultou de se disporem já de resultados gráficos obtidos numa unidade de microfilmes de Los Alamos e de ser assim mais fácil fazer comparações.

O teste que se executou foi o «BROKEN DAM NO SLIP WALLS» (rebentamento de uma barragem, fluido viscoso) em que se observa o comportamento de uma coluna de líquido, contida inicialmente entre

duas paredes, a partir do instante em que uma delas «desaparece». Supõe-se que na parede que resta e no solo a velocidade do fluido é nula.

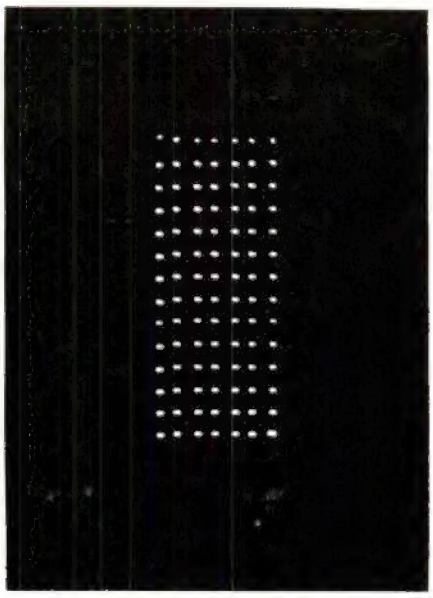
Usaram-se 98 partículas para visualizar o escoamento (embora se tenham usado 1056 nos cálculos), com buffers de 588 bytes, contendo cada buffer duas imagens iguais. Contando com o gap de 548 bytes, obtivemos portanto um ritmo de aproximadamente

$$26 \text{ imagens/seg.} \left(\frac{30\,000 \text{ bytes/seg.}}{(588+548) \text{ bytes/imagem}} \right)$$

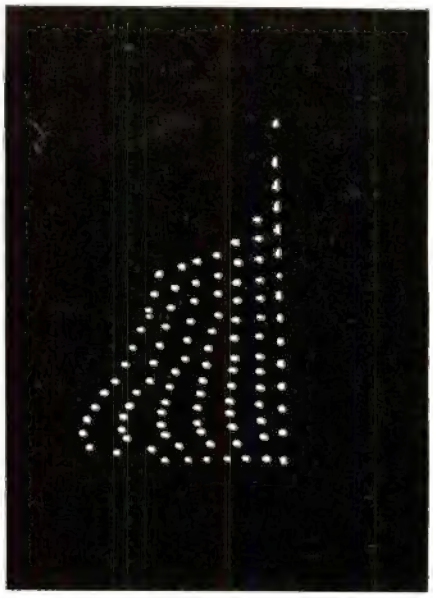
Foram realizados 2 filmes do mesmo problema, um com a duração de 5 s que precisou de 20 min. de tempo de CPU no IBM 360/44 do CCUL e outro de 50 s que precisou de 2 horas de CPU no mesmo computador. O facto de o tempo de CPU não aumentar linearmente com o tempo de filme é devido ao passo no tempo ser mais pequeno no 2.º filme (sendo inferior em média o número de iterações necessário para o cálculo da pressão).

Foram tiradas algumas fotografias ao osciloscópio, em fases sucessivas do colapso da massa de líquido que dão uma ideia da evolução do processo, como a seguir se representa.

Da observação dos filmes chegou-se à conclusão que este sistema de saída de resultados do computador é uma excelente ferramenta de trabalho no domínio da Análise Numérica aplicada à Mecânica dos Fluidos, assumindo os resultados muito maior significação do que milhares de algarismos a representar campos de velocidade e posições de partículas.

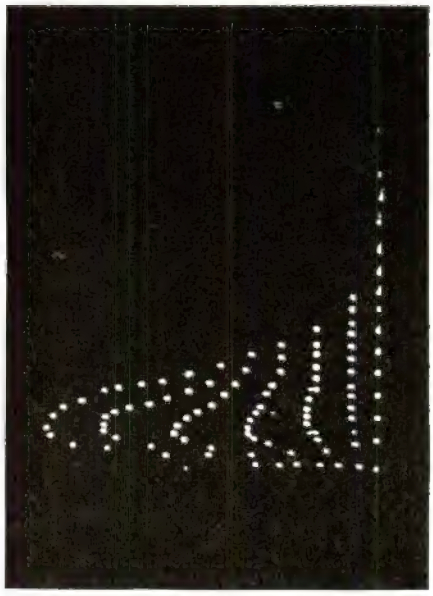


Situação inicial do fluido
(1)



(2)

(3)



(4)

BIBLIOGRAFIA

[1] Eckert, R. — «Geräteunabhängige graphische Software — Probleme und Lösungsmöglichkeiten» GDV 75-4, Teschnische Hochschule Darmstadt, 1975.

[2] Encarnação, J. — «Computer-Graphics — Programmierung und Anwendung von Graphischen Systemen». R. Oldenbourg Verlag, München, 1975.

[3] Encarnação, J. — «Tratamento de Informação Gráfica»; curso de especialização 138, LNEC, Lisboa, 1974.

[4] Martins, J. L. — PGBD — Manual do utilizador (em preparação).

[5] Nake, F. & Rosenfeld, A. (editores) — «Graphic Languages». Proc.-of the IFIP Working Conference on Graphic Languages, Vancouver, 1972.

[6] Newman, W. & Sproull, R. — «Principles of Interactive Computer Graphics», McGraw-Hill Book Comp., N. Y. 1973.

[7] Prince, D. — «Interactive Graphics for Computer-Aided Design», Addison — Wesley Publ. Comp., London, 1974.

[8] Quirino, M. — «Projecto SAGRA» — 1.º relatório preliminar. Rel. interno Teschnische Hochschule Darmstadt GDV-75-1-P, Darmstadt, 1975.

[9] Quirino, M. & Martins, J. L. — «PGED — Package Gráfico Básico para Display off-line» (I); relatório interno UNL, Jun. 74, Lisboa, 1974.

[10] Quirino, M. & Martins, J. L. — idem (II), Dez. 74, Lisboa, 1974.

[11] A A. Amsden e Francis H. Harlow — The Smac Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows LA-4370, Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California.

[12] J. J. Amarante dos Santos — SMAC: Notas sobre as versões existentes no CTAMFUL.

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 437

Ano LI — Dezembro 1976

C. D. U. 62.001.6(09)

J. J. DELGADO DOMINGOS

CENTRO DE TERMODINÂMICA APLICADA E MECÂNICA DE FLUIDOS DAS UNIVERSIDADES DE LISBOA (C. T. A. M. F. U. L.)

(Breve resenha sobre a sua criação e evolução)

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 133 a 142

Apresenta-se uma breve resenha sobre o Centro de Termodinâmica Aplicada e Mecânica dos Fluidos das Universidades de Lisboa desde a sua criação até ao momento actual. Focam-se as vicissitudes mais salientes por que passou, a orientação adoptada pela sua Direcção e a inserção do Centro no panorama português da investigação. O trabalho realizado sintetiza-se na lista de publicações directamente originadas no Centro e seus colaboradores.

C. D. U. 62.9

J. J. DELGADO DOMINGOS

RECURSOS NATURAIS, ECONOMIA E SOCIEDADE

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 143 a 157

Na primeira parte do artigo examinam-se alguns aspectos da economia corrente e do planeamento e extraem-se algumas ilações para o caso nacional. Na segunda parte, apresentam-se alguns resultados da análise energética aplicados à Agricultura, à Indústria e aos Transportes e mostra-se como a crise do ambiente e a crise alimentar têm subjacente a crise da energia. Na terceira parte apontam-se algumas previsões acerca da «nova ordem económica internacional».

C. D. U. 620.9

J. J. DELGADO DOMINGOS

O PROBLEMA ENERGÉTICO PORTUGUÊS

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 159 a 167

Analisa-se sucintamente o problema energético português com dados existentes em 1975 e tendo em conta a situação geral do País quanto a capacidade tecnológica, financeira e de emprego. Os problemas energéticos são abordados tendo em conta a capacidade de refinação, os consumos nos Transportes, na Indústria e na Agricultura. Afloram-se possíveis alternativas energéticas, e alguns problemas subjacentes de natureza política e social. As implicações da produção monopolista de electricidade são referidas. A opção nuclear não se justifica no actual contexto.

C. D. U. 620.9:338.91

J. J. DELGADO DOMINGOS

ALTERNATIVAS ENERGÉTICAS

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 169 a 173

Qualquer actividade humana tem um custo em energia. Analisar o dispêndio em energia de todas as actividades é objectivo da Análise Energética. Neste artigo consideram-se valores já conhecidos para as principais actividades e extraem-se as ilações para o caso de Portugal. Conclui-se com a enumeração de um plano possível de diversificação energética para o caso português, tendo em conta os problemas do emprego e do desenvolvimento económico.

C. D. U. 621.47

J. J. DELGADO DOMINGOS

APROVEITAMENTO DA ENERGIA SOLAR EM PORTUGAL

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 175 a 181

Faz-se uma sucinta descrição das aplicações da energia solar e analisam-se as possibilidades actuais do país quanto ao lançamento em larga escala da utilização de energia solar. Apontam-se como primeira meta as utilizações da energia solar no aquecimento. Esboça-se um programa concreto de actuação.

C. D. U. 62.001

J. J. DELGADO DOMINGOS

PLANEAMENTO DA INVESTIGAÇÃO NO SECTOR DA ENGENHARIA MECÂNICA EM PORTUGAL

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 183 a 186

Como os recursos para a investigação são sempre escassos analisa-se a estratégia da sua repartição pelos sectores fundamentais a partir do seu efeito multiplicativo ou factor de impacto. Tal impacto tem em conta a estrutura actual da indústria mecânica do país e os factores essenciais que têm motivado o seu desenvolvimento. Finalmente mostra-se como a investigação em Termodinâmica Aplicada representa um sector chave para um desenvolvimento moderno a caminho da progressiva autonomização.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.º 437

LI — December 1976

C. D. U. 620.9:338.91

J. J. DELGADO DOMINGOS

ENERGY OPTIONS

Tecnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 169 a 173

Every human activity has an energy cost. To establish those costs is the object of Energy Analisys. This paper considers values already known for energy costs in the main human activities and points the implications for Portugal. Some points for a viable program of energy diversification in Portugal are refered, taking into account the problems of employment and economic development.

C. D. U. 62.001.6(09)

J. J. DELGADO DOMINGOS

A BRIEF SUMMARY OF THE EVOLUTION OF C.T.A.M.F.U.L.

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 133 a 142

A brief summary of the evolution of C.T.A.M.F.U.L. (Center for Applied Thermodynamics and Fluid Mechanics of the Universities of Lisbon) is presented together with the main difficulties which had and has to face, the main options of research and the reasons behind are refered. A list of publications gives a synthesis of the main work done up to now.

C. D. U. 621.47

J. J. DELGADO DOMINGOS

SOLAR ENERGY UTILIZATION IN PORTUGAL

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 175 a 181

A brief review of solar energy utilization is done, in connection with present capabilities of implementation on the portuguese market. It is shown that a first goal to achieve is the use of solar energy in heating applications. A plan of action in Portugal is sketeched.

C. D. U. 62.9

J. J. DELGADO DOMINGOS

NATURAL RESOURCES, ECONOMY AND SOCIETY

Tecnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 143 a 157

The paper is divided in three parts. The first deals with some aspects of usual economy and planning and some warning are drawn for the Portuguese situation. The second part considers energy analysis in food production, industry and transportation and is shown how the environmental and food crisis have the energy crisis as the driving force. Third part, based on the previous data, traces shortly, a prediction for the «new international order in economy».

C. D. U. 62.001

J. J. DELGADO DOMINGOS

PLANNING RESEARCH ON MECHANICAL ENGINEERING IN PORTUGAL

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 183 a 186

Because research funds are always scarce, its allocation must be based on impact analysis. This analysis takes into account the present structure and development of the mechanical industries in Portugal and the main factor behind its development. It is shown how research in Applied Thermodynamics is a key sector for modern development in a way to progressiva autonomy.

C. D. U. 620.9

J. J. DELGADO DOMINGOS

THE PORTUGUESE ENERGY PROBLEM

Tecnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 159 a 167

The Portuguese energy problem is briefly reviewed with data available in 1975, taking into account the technological capacity, financial resources and employment. The analysis considers refining capacity, Transportion, Industry and Agriculture. Energy alternatives and some underlying political and social problems are refered. The implications of monopolistic production of electricity are mentioned. Nuclear power stations are shown to have no justification on present situation.

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 437

Ano LI — Dezembro 1976

C. D. U. 620.93:536.662

MÁRIO NERY R. NINA

FENÓMENOS DE COMBUSTÃO COM IMPORTÂNCIA EM ENGENHARIA

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 187 a 190

Portugal depende dos combustíveis fósseis para satisfazer mais de 80% das suas necessidades energéticas presentes.

Um conhecimento mais aprofundado da Mecânica dos Fluidos e da Química dos Sistemas com Combustão será indispensável se se pretender melhorar o aproveitamento dos combustíveis e minorar os efeitos prejudiciais das emissões que lhe estão associados.

A linha de Combustão do C.T.A.M.F.U.L. propõe-se contribuir para este esforço, desenvolvendo métodos de cálculo de câmaras de combustão e validando-os através de experimentação laboratorial e de medidas em instalações industriais, divulgando os resultados obtidos e realizando cursos intensivos na sequência do que efectuou em Dezembro de 1975.

C. D. U. 621.018

J. J. DELGADO DOMINGOS
E. MANSO
MÁRIO NERY R. NINA

FORNALHA EXPERIMENTAL CALORIMÉTRICA

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 191 a 194

Projectou-se e construiu-se uma fornalha de secção quadrada (500×500 mm) com o objectivo de permitir obter valores experimentais para validação de métodos de cálculo de câmaras de combustão e fazer ensaios de queimadores e de corrosão de alta temperatura.

A estrutura da fornalha permite variações na geometria dos circuitos dos gases e da água de arrefecimento.

Apresentam-se resultados de ensaios de um queimador do tipo cone rotativo, onde se mostra a influência da carga e do excesso de ar na distribuição do fluxo de calor.

C. D. U. 536.24:620.197:697.8

J. M. BRISSON LOPES

TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO EM CHAMINÉS (ANÁLISE E RESOLUÇÃO NUMÉRICA)

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 195 a 205

O presente trabalho surgiu da necessidade do conhecimento da temperatura e velocidade dos gases à saída duma chaminé conhecidos os seus valores na base. Tais valores são importantes para a previsão da dispersão de poluentes emitidos pelas chaminés para a atmosfera. Analisa-se a transferência de calor entre os gases e o exterior das chaminés. Calculam-se os coeficientes de transmissão superficial de calor e as propriedades do ar a 760 mmHg. Realizou-se assim um programa para cálculo da temperatura dos gases ao longo da chaminé, da sua velocidade na base e no topo e os perfis de temperatura nas paredes interior e exterior. Analisam-se seguidamente alguns casos reais, sendo tratado o problema da corrosão de chaminés metálicas.

C. D. U. 628.5

M. TERESA PONTES

FACTORES DO DIMENSIONAMENTO DUMA CHAMINÉ EMISSORA DE POLUENTES

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 207 a 214

Neste trabalho descreve-se sucintamente o cálculo da altura duma chaminé emissora de poluentes e acentuam-se os pontos críticos: concentrações máximas de poluentes a admitir no solo, condições meteorológicas e sobre-elevação da pluma.

Como exemplo da sensibilidade do modelo às condições de cálculo apresenta-se o dimensionamento da chaminé principal da Refinaria da Petrosul em Sines.

C. D. U. 536.2:66.046.3:664.8.037:621.58:336.24

J. M. BRISSON LOPES

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA CONGELAÇÃO DE PEIXE POR CIRCULAÇÃO FORÇADA DE AR

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 215 a 222

Resolve-se um problema bidimensional de congelação de peixe por meio dum programa de cálculo numérico que permite obter a solução dum sistema de equações às derivadas parciais do tipo:

$$\frac{\delta u_i}{\delta t} = f_{i1} \frac{\delta^2 u_i}{\delta x^2} + f_{i2} \frac{\delta^2 u_i}{\delta y^2} + f_{i3}$$

com condições fronteiras do tipo

$$\beta \frac{\delta u_i}{\delta n} + \gamma (u_i)_s + \delta = o$$

pelo método ADI.

Nesta resolução toma-se em conta que a congelação não se verifica a uma dada temperatura, mas sim numa determinada gama de temperaturas e que é desigualmente distribuída, conduzindo a um problema com propriedades físicas variando discretamente. Apresentam-se também gráficos com a distribuição das isotérmicas que evidenciam o avanço da frente de congelação ao longo do tempo.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.º 437

LI — December 1976

C. D. U. 536.24:620.197:697.8

J. M. BRISSON LOPES

STEADY STATE HEAT TRANSFER IN CHIMNEYS (ANALYSIS AND NUMERICAL TREATMENT)

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 195 a 205

The prevision of the dispersion of airborne chimney or stack effluents requires that the temperature and the speed of the gases at the top of the stack should be known. This paper presents a way of computing those values given the temperature at the bottom, the mass flow rate of the gases and the caracteristic stack dimensions. An analysis of the heat transfer between the flue gases and the outside of the stack is made. The heat transfer coeficients and the properties of air at 760 mm of Hg are calculated. A computer program was developped. This program computes the longitudinal temperature profiles of gases and of the inside and the outside stack surfaces, and the gas speed at the top and bottom of stacks. The last part of this paper analyses a few real cases and presents an example of prevision of minimum inside stack surface temperature, an important parameter for preventing acid corrosion in metalic stacks.

C. D. U. 628.5

M. TERESA PONTES

DESIGN FACTORS OF A POLLUTANT EMITTING STACK

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 207 a 214

We briefly describe the calculation of the height of a pollutant emission stack. The critical points are stressed: maximum ground pollutant concentration, meteorological conditions and plume rise.

As an example of the model's sensivity to the input variables, we present the calculation of the Petrosul Refinery's main stack.

C. D. U. 536.2:66.046.3:664.8.037:621.58:336.24

J. M. BRISSON LOPES

NUMERICAL SIMULATION OF FISH FREEZING BY FORCED AIR CONVECTION

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 215 a 222

This paper describes the numerical solution of a fish freezing process by means of a computer program which solves sets of coupled equations of the kind:

$$\frac{\delta u_i}{\delta t} = f_{i1} \frac{\delta^2 u_i}{\delta x^2} + f_{i2} \frac{\delta^2 u_i}{\delta y^2} + f_{i3}$$

with bondary conditions obeying to:

$$\beta \frac{\delta u_i}{\delta n} + \gamma (u_i)_s + \delta = o$$

applying an ADI method.

It was assumed that freezing occurs in an interval of temperature, the rate of freezing varying throughout this interval of temperatures, as it would happen when freezing sea water. The result is a problem with discrete variation of physical properties which is solved for an exemple of fish freezing by forced air convection.

The results are also presented in graphics showing how the freezing front and the isothermal lines progress throughout the freezing process.

C. D. U. 620.93:536.662

MARIO NERY R. NINA

COMBUSTION PHENOMENA AND THEIR APPLICATIONS IN ENGINEERING

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 187 a 190

Over 80% of the energy used in Portugal today is derived from fossil fuels.

A better understanding of the Fluid Mechanics and the Chemistry of Reacting Systems will be required in order to improve the efficiency of combustion processes and simultaneously decrease the amount of harmful effluents.

The Combustion Group of C.T.A.M.F.U.L. is concentrating efforts in the development of better furnace prediction methods, validated through experimental data obtained both in the laboratory and in industrial instalations, and offering short specialised courses like the one that took place in December 1975.

C. D. U. 621.018

J. J. DELGADO DOMINGOS
E. MANSO
MARIO NERY R. NINA

A CALORIMETRIC EXPERIMENTAL FURNACE

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 191 a 194

A 500×500 milimeter square section furnace was designed and built to provide data for the testing of prediction procedures applied to furnace design and to enable experiments to be carried on high temperature corrosion and burner design.

The furnace structure allows the geometry of the gas passage and the cooling circuit to be assembled in several ways.

Some preliminary test results are presented and show the effect of excess of air and load on local heat flux using a rotating cup type of burner.

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 437

Ano LI — Dezembro 1976

C. D. U. 621.47:621.383

LEOPOLDO J. M. GUIMARÃES

AS CÉLULAS FOTOVOLTAICAS NO APROVEITAMENTO DA ENERGIA SOLAR

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 223 a 225

A energia solar representa uma solução que se considera possível para resolver em parte o grave problema de encontrar fontes de energia que possam substituir em termos de futuro as disponibilidades energéticas clássicas que num futuro mais ou menos próximo se encontrarão esgotadas.

Neste artigo tecem-se algumas considerações acerca do aproveitamento da energia solar, usando células solares as quais convertem a radiação solar directamente em energia eléctrica com uma razoável eficiência.

C. D. U. 697.97:662.997

L. F. C. RORIZ

ELABORAÇÃO DE TABELAS DE TEMPERATURA SOL-AR PARA PAREDES, PARA A REGIÃO DE PORTUGAL CONTINENTAL

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 227 a 235

De todos os métodos utilizados para o cálculo de cargas térmicas em Ar Condicionado, o da Temperatura Sol-Ar é o mais preciso e é largamente utilizado. Por estes motivos e dado que as tabelas existentes não se referem à situação climatológica de Portugal, elaborou o autor, tabelas de temperatura Sol-Ar próprias para as caracteristicas do nosso país.

C. D. U. 517.93:518.1

J. J. DELGADO DOMINGOS
L. F. C. RORIZ

APLICAÇÃO DO MÉTODO EXPLÍCITO-IMPLÍCITO EM SISTEMAS DE EQUAÇÕES PARABÓLICAS, NÃO LINEARES, EM DOMÍNIOS DE GEOMETRIA ARBITRÁRIA

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 237 a 239

Define-se o método explícito-implícito para a solução numérica de sistemas de equações às derivadas parciais parabólicas não lineares em domínios de geometria arbitrária e apresentam-se alguns resultados de aplicação. As vantagens relativas ao método dos elementos finitos e aos de diferenças finitas implícitas são referidas quanto aos aspctos memória — tempo de cálculo.

C. D. U. 518.1

HEITOR LOBATO GIRÃO PINA

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 241 a 248

Neste artigo faz-se uma introdução ao método dos elementos finitos, descrevendo as suas principais características que o tornam distinto dos outros métodos de solução de equações diferenciais.

C. D. U. 621.154

A. F. DE O. FALCÃO

O MÉTODO DAS SINGULARIDADES NO ESTUDO TRI-DIMENSIONAL DO ESCOAMENTO EM TURBOMÁQUINAS AXIAIS

Tésnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 249 a 256

Apresentam-se os fundamentos do método das singularidades para representação do escoamento em turbomáquinas axiais. Em particular, descreve-se a aplicação dos métodos da linha e da superficie sustentadoras, para estudo do escoamento em cascatas rectilíneas de pás com geometria tri-dimensional.

D. D. U. 621-154

A. J. DE ALMEIDA SARMENTO
J. A. FALCÃO DE CAMPOS

ESCOAMENTO POTENCIAL BIDIMENSIONAL NUMA CASCATA DE PERFIS RECTOS — MÉTODO DA TRANSFORMAÇÃO CONFORME

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 257 a 265

Apresenta-se a análise do escoamento potencial bidimensional numa cascata inclinada de perfis rectos a partir da transformação conforme do escoamento em torno do círculo. Obtêm-se as expressões da velocidade, ângulo de ataque e forças que actuam sobre os perfis. Apresentam-se e discutem-se os resultados numéricos obtidos para a distribuição de pressão na região da cascata, ângulo de deflexão, coeficiente de sustentação e coeficiente de interferência.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.º 437

LI — December 1976

C. D. U. 518.1

HEITOR LOBATO GIRÃO PINA

THE FINITE ELEMENT METHOD

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 241 a 248

This paper presents the finite element method in an introductory way and describes its principal features which distinguishes it from other methods for solving differential equations.

C. D. U. 621.47:621.383

LEOPOLDO J. M. GUIMARÃES

PHOTOVOLTAIC CELLS IN DIRECT SOLAR ENERGY CONVERSION

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 223 a 225

Solar energy represents one possible solution to the major problem we face today: how to find energy resources to replace the non-renewable energy reserves we have been using and wasting up to now.

In this paper some considerations are made on solar cells which are photovoltaic cells that convert sunlight directly into electrical energy with a good efficiency.

C. D. U. 621.154

A. F. DE O. FALCÃO

FLOW ANALYSIS IN AXIAL TURBOMACHINES BY SINGULARITY METHODS

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 249 a 256

The use of singularity methods for the analysis of the flow in axial turbomachines is outlined. In particular, lifting-line and lifting-surface theories are employed to study the flow about a three-dimensional straight cascade of twisted blades

C. D. U. 697.97:662.997

L. F. C. RORIZ

SOL-AIR TEMPERATURE TABLES OF WALLS FOR PORTUGAL (CONTINENTAL)

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 227 a 235

The Sol-Air temperature method is an accurate and widely used method in Air-Conditoning engineering, for the calculation of heat gains in a room. This work presents tabulated values that are to be used in Portugal, as evaluated tables of Sol-Air temperature for this weather conditions are not available.

D. D. U. 621-154

A. J. DE ALMEIDA SARMENTO
J. A. FALCÃO DE CAMPOS

TWO-DIMENSIONAL POTENTIAL FLOW THROUGH A CASCADE OF STRAIGHT BLADES — METHOD OF THE CONFORMAL TRANSFORMATION

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 257 a 265

The theoretical analysis of the two-dimensional potential flow about a staggered cascade of straight blades is presented based on the conformal transformation of the flow about a circle. Expressions are derived for the velocity, angle of attack and forces acting on the aerofoils. Numerical results for the pressure distribution about the cascade, deflection angle, lift coefficient and interference coefficient are also presented and discussed.

C. D. U. 517.93:518.1

J. J. DELGADO DOMINGOS
L. F. C. RORIZ

IMPLICIT-EXPLICIT METHOD APPLIED TO NON LINEAR PARABOLIC DIFFERENCE EQUATIONS IN A ARBITRARY GEOMETRY

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 237 a 239

The explicit-implicit method for the numerical solution of systems of non linear parabolic partial differential equations in arbitrary geometries is defined and some results of application are shown. The relative advantages in relation to the finite element methods and implicit finite difference methods are refered in what concerns memory-computing time.

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 437

LI — Dezembro 1976

C. D. U. 62.002.1

L. F. C. RORIZ

PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO DUMA REDE DE ACTIVIDADES PELO MÉTODO DO CAMINHO CRITICO

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 267 a 270

Embora existam já programas para resolução dum diagrama CPM-tempo por computador, a sua utilização além de onerosa não era didáctica. Por estas razões foi desenvolvido no CTAMFUL, para apoio da Divisão de Termodinâmica Aplicada, um programa para a resolução deste tipo de problemas.

J. J. DELGADO DOMINGOS
J. J. AMARANTE DOS SANTOS
M. QUIRINO
A. NEVES DE CARVALHO

PROJECTO, CONSTRUÇÃO E UTILIZAÇÃO DE UM «DISPLAY» ÓPTICO «OFF-LINE»

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 271 a 282

A necessidade de representar de modo cómodo o enorme volume de dados gerados na solução numérica das equações às derivadas parciais que regem o escoamento de fluidos e o elevado custo do equipamento existente no mercado levou ao projecto e construção de um «display» óptico e ao desenvolvimento do correspondente «software» de operação. É este o trabalho que se descreve no artigo. O equipamento realizado, centrado sobre problemas de aplicação, além do seu baixo custo, permitiu evidenciar as amplas possibilidades que tal «display» oferece em inúmeros outros domínios.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.º 437

Ano LI – December 1976

J. J. DELGADO DOMINGOS
J. J. AMARANTE DOS SANTOS
M. QUIRINO
A. NEVES DE CARVALHO

DESIGN, MANUFACTURE AND USE OF AN OFF-LINE OPTICAL DISPLAY

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 271 a 282

The need for display representation processing numerical data generated on the numerical solution of partial differential equations which govern the flow of viscous fluids, and the very expensive equipment available on the market for visual display motivated the development of the prototype whose hardware and software are described.

The work done stressed the importance of project development centered on applications and showed the cheapness and wide range of applicability of the equipment built.

C. D. U. 62.002.1

L. F. C. RORIZ

PROGRAM FOR SOLVING CPM-TIME

Técnica N.º 437 — LI — 12-1976, p. 267 a 270

None of the existing programs for solving CPM-time problems is suitable for teaching purposes, to the author's best knowledge as they are all available in machine language only. Therefore, a new CPM-time solving program was developed at CTAMFUL, with teaching purposes in mind, and has already been used by the Applied Thermodynamics Department students.

Publicações Recebidas

PUBLICAÇÕES PERIÓDICAS

— AGROS
Associação dos Estudantes de Agronomia

— ANALLES DE MECÁNICA Y ELECTRICIDAD
Asociacion de Ingenieros del I. C. A. I.

— ASEA — REVUE

— ACTA TECHNICA
Academiae Scientiarum Hungariae

— ANAIS DO CLUBE MILITAR NAVAL

— ANALYTICAL ABSTRACTS
Society for Analytical Chemistry

— ACIER - STAHL - STELL

— ANNALES
Institut Technique du Batiment et des Travaux Public

— AEG - TELEFUNKEN AL DIA

— AR COMPRIMIDO
Atlas Copco

— BOLETIM DA CÂMARA MUNICIPAL DE SÁ DA BANDEIRA

— BOLETIM ECONÓMICO E FINANCEIRO
Banco Borges & Irmão

— BOLETIM
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM MENSAL DE INFORMAÇÃO
Laboratório Nacional de Engenharia Civil

— BULLETIN OF THE SEISMOGRAPHIC STATIONS
University of California

— BOLETIM DEL CEMENTO PORTLAND
Instituto del Cemento Portland Argentino

— BOLETIM GTH
Gabinete Técnico da Habitação da Câmara Municipal de Lisboa

— BOLETIM
Sociedade Geológica de Portugal

— BOLETIM INFORMATIVO IRANOR
Instituto Nacional de Racionalizacion y Normalizacion

— BOLETIM DA ELECTROQUÍMICA E CORROSÃO
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM
Departamento de Imprensa e Informação do Governo da República Federal da Alemanha

— BOLETINUL
Institutului Politehnic Bucaresti

— BOLETIM
Associação Industrial de Angola

— BOLETIM DO PORTO DE LISBOA
Administração-Geral do Porto de Lisboa

— BOLETIM DO SERVIÇO CARTOGRAFICO DO EXERCITO

— BOLETIM DE MINAS
Direcção-Geral de Minas e Serviços Geológicos

— BULLETIN DE LA CHAMBRE DE COMMERCE BELGE AU PORTUGAL

— BULLETIN
Agence Internationale de L'energie Atomique
Instituto dos Produtos Florestais

— CENIM

— CORTIÇA
Centro Nacional de Investigaciones Metalurgicas

— (JOURNAL OF) CHEMICAL EDUCATION
Division of Chemical Education of the American Chemical Society

— CIMENTO E CONCRETO
Associação Brasileira de Cimento Portland

— COMUNICAÇÕES ELECTRICAS
International Telephone and Telegraph Corporation

— CONSTRUCTI

— CARTA GEOLÓGICA DE ANGOLA
Direcção Provincial dos Serviços de Geologia e Minas

— CEMENTO HORMIGÓN

— COURRIER CERN

— COLLECTION
Czechoslovak Academy of Sciences

— DYNA
Asociacion de Engenieros Industriales de España

— EL ESTAÑO Y SUS APLICACIONES
Tin Research Institute

— ELECERICITE DE FRANCE
Direction des Etudes et Recherches

— ELECTRICIDADE
Empresa Editorial Electrotécnica Edel, Lda.

— ENDEAVOUR
Imperial Chemical Industries Limited

— ESTUDOS
Banco Fomento Nacional

— ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS
Serviço de Fomento Mineiro

— ELECTRICAL COMMUNICATION
International Telephone and Telegraph Corporation

— ECONOMIC REVIEW
Câmara de Comércio Luso-Britânica

— FUNDIÇÃO
Associação Portuguesa de Fundição

— FUNDEXPORT
Fundo de Fomento de Exportação

— GEOTÉCNICA
Revista da Sociedade Portuguesa de Geotécnica

— INFORMES DE LA CONSTRUCCIÓN
Instituto Eduardo Torroja

— ION
Sindicato Nacional de Indústrias Químicas

— INDÚSTRIA DE MOÇAMBIQUE
Associação Industrial de Moçambique

— LA HOUILLE BLANCHE
Société Hydrotechnique de France

— LES NOUVELLES DE L'E. I. B.

— METALLURGIA AND METAL FORMING
National Association of drop Forgers and Stampers

— MACHINE TOOL REVIEW

— NOTICIARIO DOS ELASTÓMEROS
du Pont

— ONU (CHRONIQUE MENSUELLE)
Service de l'Information de l'Organization des Nations Unies

— O PROPULSOR
Sindicato Nacional dos Oficiais da Marinha Mercante

— PRELO
Imprensa Nacional - Casa da Moeda

— PORTUGAL - ALEMANHA
Câmara de Comércio e Indústria Luso-Alemã

— REVISTA DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
Universidade de Lourenço Marques

— REVUE LANDIS E GYR (EDITION ELECTRICITÉ)

— REVUE D'IENA

— REVUE SIEMENS
Siemens Antiengesellschaft

— REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

— LA REACHERCHE AÉROSPATIALE
Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales

— REVISTA DE METALURGIA
Cenim - Centro Nacional de Investigaciones Metalúrgicas

— RAIL INTERNATIONAL
Association Internationale du congrès des chemins de fer et de L'Union Internationale des Chemins de fer

— REVISTA TÉCNICA SULZER

— REVISTA DANFOSS

— REVISTA AGRONÓMICA
Sociedade de Ciências Agronómicas de Portugal

— TECHNIQUES FRANÇAISES (BATIMENT TRAVAUX PUBLICS URBANISME)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (INDUSTRIE DE METAUX)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (TRANSPORTS)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (CHIMIE GAZ PETROLE) BIENS DE CONSOMMATION)
Services Économiques de L'Embassade de France

— WORLD HEALTH ORGANIZATION PUBLICATIONS
World Health Organization

— WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER HOCSCHULE
Architektur und Bauwesen Weimar

ERRATA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA CONGELAÇÃO DE PEIXE POR CIRCULAÇÃO FORÇADA DE AR

ONDE SE LÊ	DEVE LER-SE
pág. 217 — 1.ª coluna 10.ª linha	$\beta \frac{\delta u_1}{\delta n} + \gamma (u_1)_s + \delta = o$
pág. 219 — 1.ª coluna 7.ª linha	$= 42\,244\,812$ erg g^{-1} K^{-1}
10.ª linha	$= 0{,}487$ kcal h^{-1} m^{-1} K^{-1} $= 56\,597{,}2$ erg s^{-1} cm^{-1} K^{-1}
19.ª linha	$480 \times 252 \times$

CÁLCULO DE PÓRTICOS

Método de cálculo simples e rápido, entrando em linha de conta com o deslocamento dos nós

Por

G. KANI

Traduzido por

ANÍBAL S. A. VIEIRA

Engenheiro civil (I. S. T.)

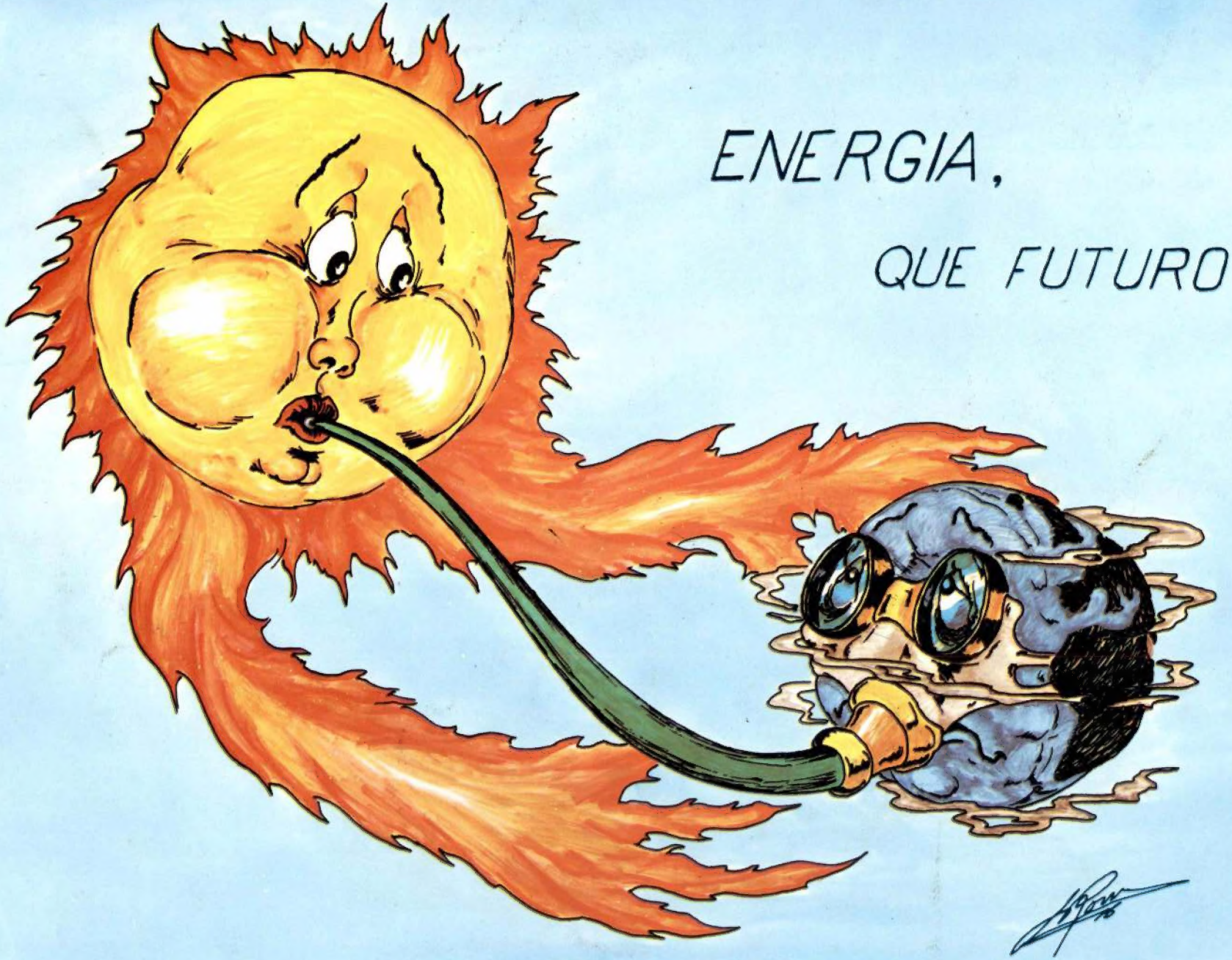
TÉCNICA

Associação dos Estudantes do I. S. T.

LISBOA — 1962

PREÇO 75.00

DESC. 10% AOS ASSINANTES


ENERGIA,
QUE FUTURO?